

Б.А.КОРДЕМСКИЙ
Н.В.РУСАЛЕВ

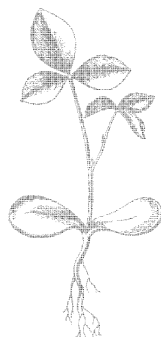
УДИВИТЕЛЬНЫЙ
КВАДРАТ

Б. А. КОРДЕМСКИЙ
Н. В. РУСАЛЕВ

УДИВИТЕЛЬНЫЙ КВАДРАТ



Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва - Ленинград
1952



Scan AAW

11-2-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В геометрии известна замечательная теорема венгерского математика Фёркаша Бóльаи: *если два многоугольника равновелики* (т. е. имеют равные площади), *то всегда возможно один из них расчленить на конечное число таких многоугольников, из которых может быть составлен второй* *).

Это значит, что если взять, например, квадрат, то без всякой потери площади его можно превратить в правильный пятиугольник или правильный шестиугольник, в один или несколько равносторонних треугольников и т. д.

Такое перекраивание квадрата в другую фигуру может быть осуществлено не единственным способом, но потребуется проявить большую находчивость и изобретательность, чтобы найти хотя бы один подходящий способ.

Допустим даже, что квадрат уже разрезан на необходимое число частей. Надо и теперь немало потрудиться, чтобы соответствующим переложением этих частей получить заданную фигуру.

Однако именно с этих упражнений полезно начать. Поэтому в первой главе мы предлагаем читателю несколько задач-головоломок на составление разнообразных фигур из частей квадрата (своего рода «геометрический конструктор»).

Мы предлагаем 12 квадратов, которые можно перерисовать, раскрасить в разные цвета **), наклеить на плотный

*) Доказательство этой теоремы можно найти в книгах В. Ф. Кагана, Д. И. Перепёлкина и Н. М. Бескина (см. литературу в конце этой книги).

**) См. последнюю страницу обложки этой книги.

картон, разрезать по начерченным линиям, уложить в коробочку и на досуге развлекаться получившейся занимательной и полезной головоломкой.

Вторая глава — следующий шаг в развитии конструкторской смекалки. В этой главе рассматриваются геометрические способы раскройки квадратов для головоломок первой главы, обоснование возможности превращения фигур и ряд задач для самостоятельного решения, но уже требующих от читателя более активной, творческой работы в перекройке фигур, так или иначе связанных с квадратом.

Привлекательность этих задач — в возможности различных решений. Одни из них, решённые ещё в глубокой древности, как увидит читатель, получили со временем лучшие решения, другие — до сих пор имеют «спортивный» интерес и нередко фигурируют на математических олимпиадах.

Упражнения в конструировании фигур из частей квадрата являются не только полезной геометрической забавой, но имеют и практический смысл: они могут помочь нашим читателям, будущим и настоящим новаторам производства, в рациональном раскрое материалов, в использовании так называемых «отходов» — обрезков кожи, ткани, дерева и т. п., для превращения их в полезные вещи. «Если закройщик на каждой паре обуви сэкономит хотя бы обрезок кожи площадью в $0,8 \text{ дм}^2$, — один только цех одной обувной фабрики даст стране 100 тысяч пар обуви без дополнительных затрат сырья», — говорил стахановец, закройщик московской фабрики «Парижская Коммуна» В. Матросов.

Известно много примеров огромной экономии, достигнутой стахановцами за счёт продуманного изменения раскроя промышленных материалов.

В третьей главе мы рассказываем о некоторых замечательных свойствах квадрата и неожиданных аналогиях, например об аналогии (ещё никогда не освещавшейся в нашей литературе) между задачей о делении прямоугольника на конечное число квадратов и правилами Кирхгофа для электрической цепи.

В частности, мы приводим пример деления квадрата на 26 не равных друг другу квадратов и тем самым рассеиваем сомнения, высказанные Г. Штейнгаузом в из-

вестной книжке «Математический калейдоскоп», что «неизвестно также, можно ли разбить квадрат на неповторяющиеся квадраты».

В небольшом послесловии мы знакомим читателя с одним остроумным геометрическим приёмом расчёта наиболее экономного раскроя листового материала, разработанным советскими учёными-математиками.

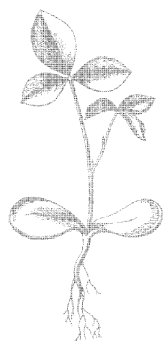
В конце каждой главы приведены решения задач, предложенных читателю.

Первая глава (голозоломки) доступна всем. Содержание второй и третьей глав требует от читателя небольших познаний в элементарной геометрии — примерно в объёме 7—8 классов средней школы — и в то же время способствует расширению его геометрических представлений. Читать эти главы следует, вооружившись карандашом и бумагой, проделывать вслед за текстом необходимые вычисления и выполнять решения задач. Каждая глава — самостоятельное целое; читатель, в зависимости от степени своего интереса, может ограничиться только первой главой или только третьей.

Полагаем, что тема книги интересна для школьных математических кружков.

Просим читателей сообщить нам свои критические замечания и пожелания по адресу: Москва, Орликов пер., 3, Государственное издательство технико-теоретической литературы.

Б. Кордемский, Н. Русалев



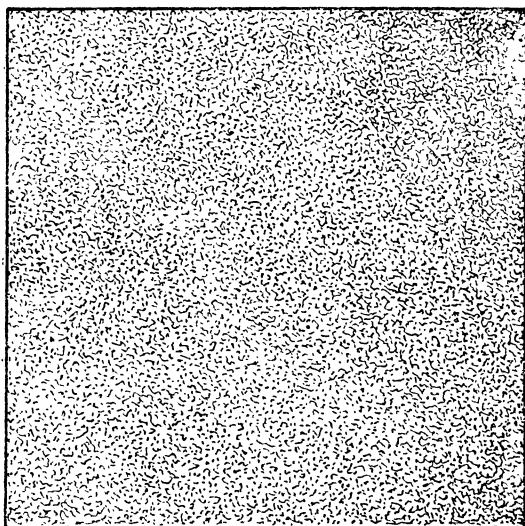
Scan AAW

Глава 1

ПРЕВРАЩЕНИЯ КВАДРАТА 23 ГОЛОВОЛОМКИ



В умелых руках любознательного человека самый обыкновенный, хорошо всем знакомый квадрат становится удивительной геометрической фигурой.



Он может, например, весь без остатка превратиться в другую фигуру или в несколько других фигур пра-

вильной или неправильной формы. Но для каждого превращения квадрат предварительно должен быть разрезан на определённые части.

На страницах 10—25 этой главы вы найдёте 12 квадратов одинакового размера.

На квадратах начерчены линии для разреза, каждый квадрат имеет свой номер и изображён в двух видах: один — большого размера, а другой (заштрихованный) — поменьше.

Прежде всего все 12 квадратов (больших!) перерисуйте на цветную бумагу разной окраски или на цветной картон.

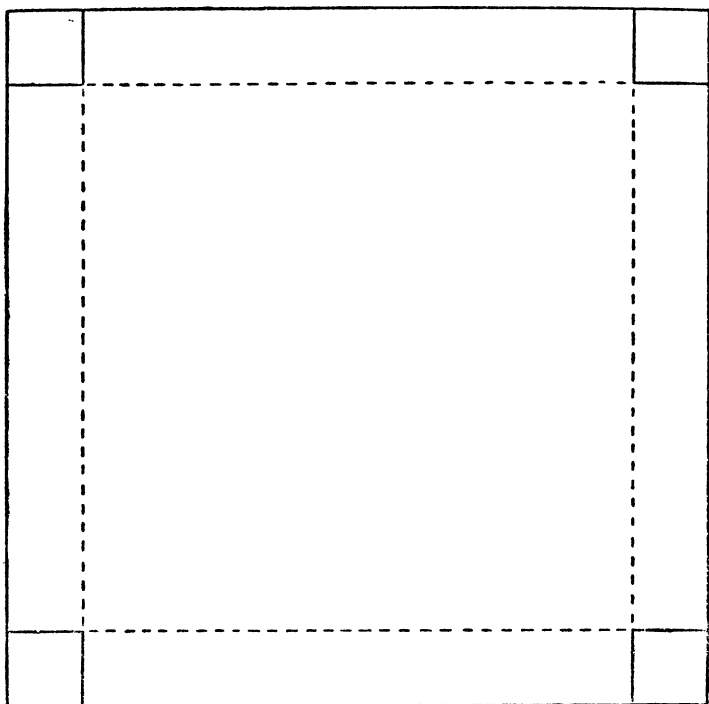
При перечерчивании квадратов на бумагу все необходимые размеры снимайте аккуратно циркулем с наших рисунков. Можно использовать и копировальную бумагу. Если нет цветной бумаги, перерисуйте на белую (например, накладывая на рисунок бумагу, которая немного просвечивает). Важно только, чтобы *все линии, начерченные на квадратах, были скопированы как можно точнее.*

Квадраты, перерисованные на белую бумагу, раскрасьте цветными карандашами или красками (очень ровным слоем), каждый в свой цвет, подобрав для этого 12 различных оттенков.

Примерная раскраска всех двенадцати квадратов показана на последней странице обложки этой книжки, но, разумеется, не является обязательной; можно выбрать и другие цвета. Только последний квадрат (№ 12) должен быть непременно *чёрным*. Каждый цветной квадрат наклейте на тонкий картон. Закрасьте тем же цветом и обратную сторону картона (нам могут понадобиться обе стороны), затем вырежьте квадрат и разрежьте на части по начерченным линиям.

Резать следует очень аккуратно и не ножницами, а острым ножиком или бритвой, пользуясь чертёжной линейкой.

Чтобы не растерять части, сделайте для квадратов коробочку по такой выкройке:



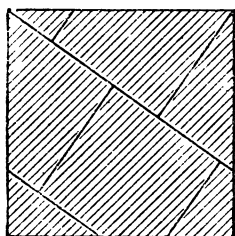
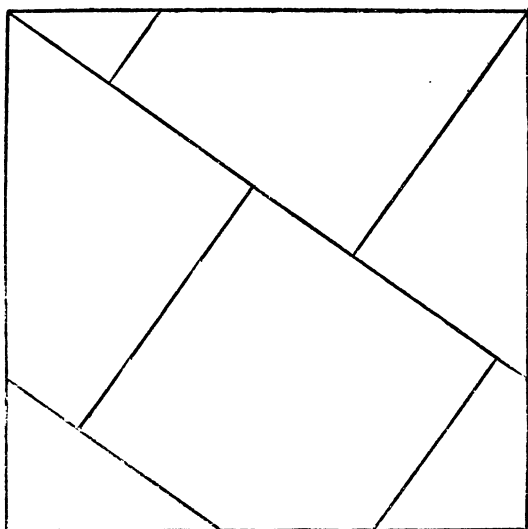
В составлении любой фигуры (за исключением особо оговоренных случаев) должны участвовать все части одного цвета.

Из частей одноцветных квадратов вы можете составлять также и новые фигуры, не указанные в головоломках этой главы.

Предупреждаем, что некоторые из наших квадратов своенравны: из них не легко составить новые фигуры или, наоборот, составленную фигуру превратить обратно в квадрат и уложить в коробочку.

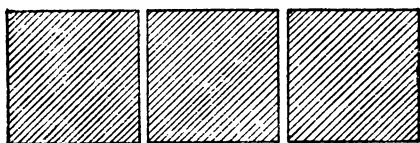
ГОЛОВОЛОМКИ

Из семи частей квадрата № 1 составьте:

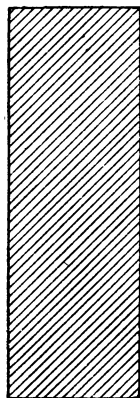


КВАДРАТ № 1

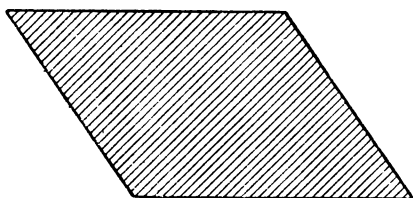
1 — три одинаковых квадрата



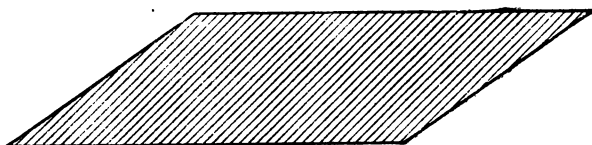
3 — прямоугольник



2 — параллелограм (широкий)

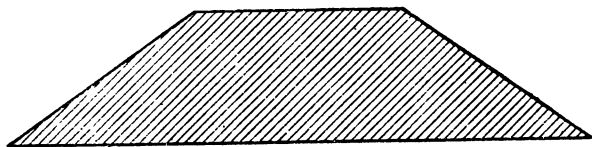


4 — параллелограм (узкий)

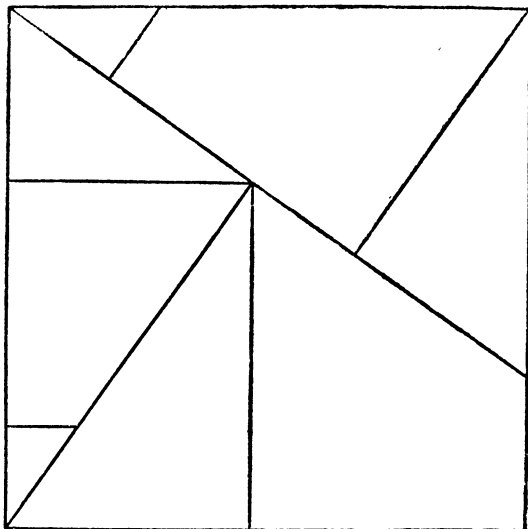


и, наконец,

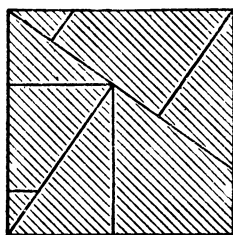
5 — трапецию



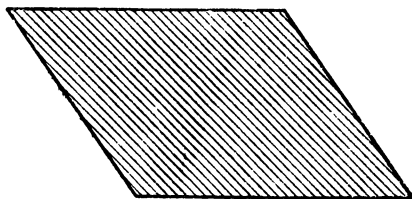
6. У квадрата № 2



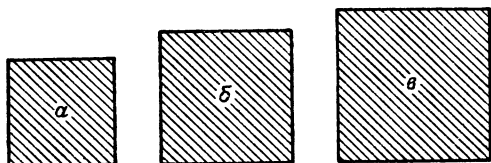
КВАДРАТ № 2



есть некоторое сходство
с квадратом № 1: из его
восьми частей можно сделать такой же паралле-
грам, как и в головоломке **2**



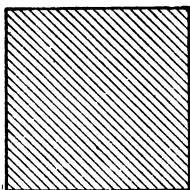
7. Квадрат № 2 можно превратить в три квадрата



площади которых относятся как 2:3:4.

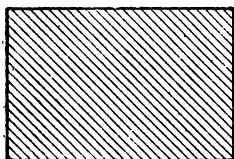
Кроме того, каждый из этих квадратов легко превратить в параллелограм.

8. В свою очередь, из частей двух квадратов *а* и *в* можно составить один квадрат

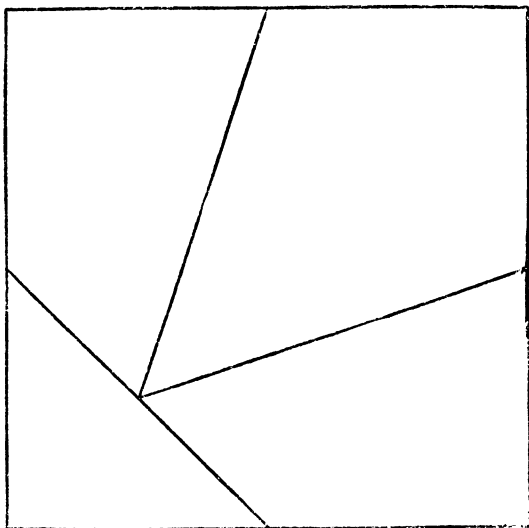


или

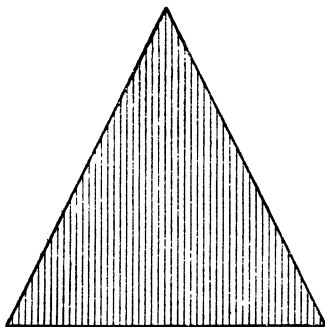
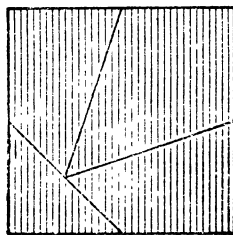
9 — прямоугольник



10. Превратите квадрат № 3

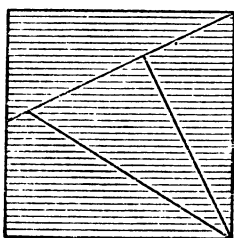
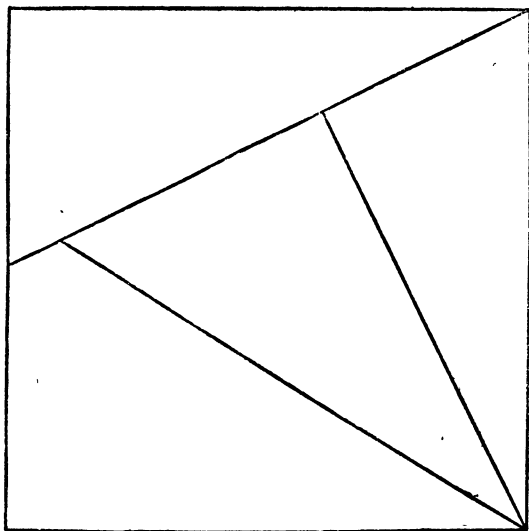


КВАДРАТ № 3



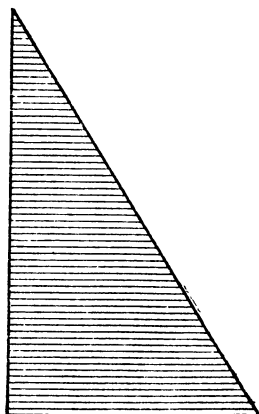
в равнобедренный
треугольник

11. Из четырёх частей квадрата № 4

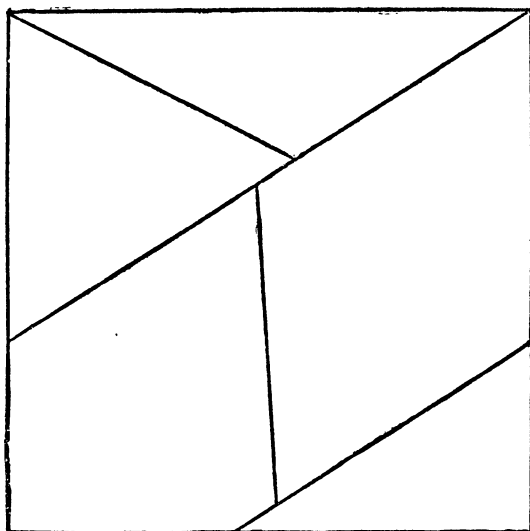


КВАДРАТ № 4

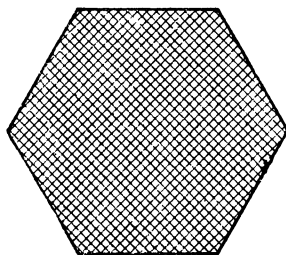
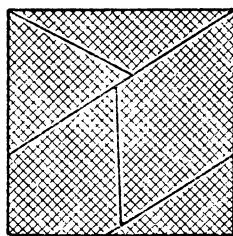
составьте прямоугольный
треугольник



12. Из пяти частей квадрата № 5

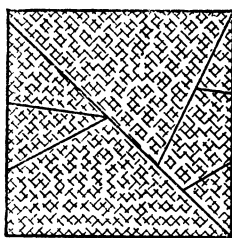
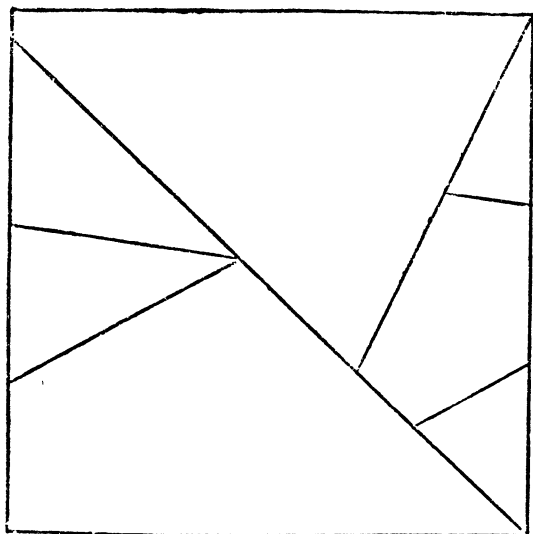


КВАДРАТ № 5



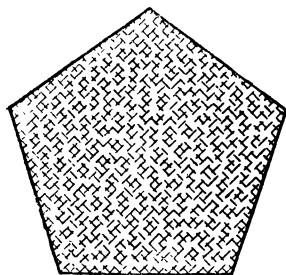
составьте правильный
шестиугольник

13. А квадрат № 6

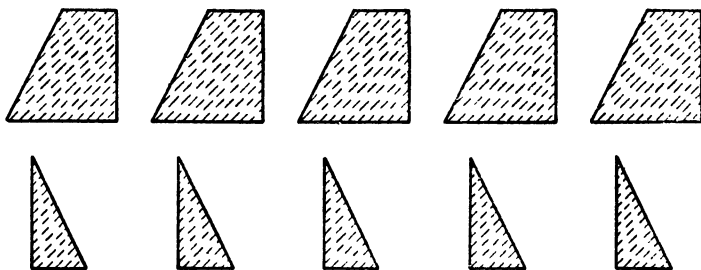


КВАДРАТ № 6

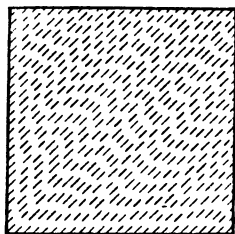
разрезан так, что из его
частей можно составить
правильный пятиугольник



14. Перед вами 5 одинаковых трапеций и 5 одинаковых прямоугольных треугольников



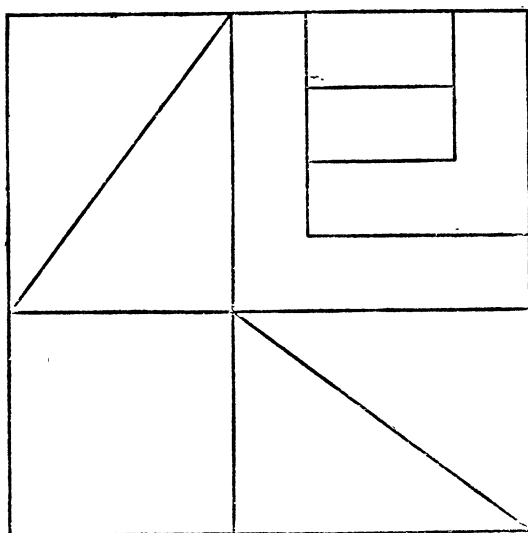
из них легко составить пять одинаковых квадратов, но несколько сложнее — один квадрат № 7.



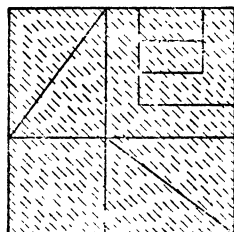
КВАДРАТ № 7

Этот квадрат в увеличенном размере помещён на странице 31; там на нём проведены линии разреза.

15. Среди частей квадрата № 8



КВАДРАТ № 8



вы видите четыре прямоугольных треугольника и два квадрата, один из которых тоже разрезан на части. Три прямоугольных треугольника (какие — сообразите сами) отделите от данного квадрата так,

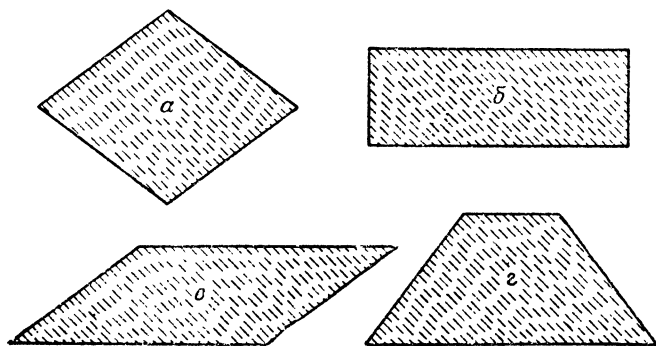
чтобы остался один треугольник и два квадрата, примыкающих к его катетам.

Если теперь из всех частей двух квадратов, примыкающих к катетам оставшегося прямоугольного треугольника, вы составите один сплошной квадрат, то он обязательно будет точно примыкать к гипотенузе треугольника, то-есть сторона этого квадрата будет равна гипотенузе треугольника. Проверьте!

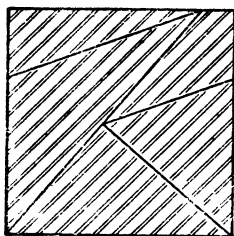
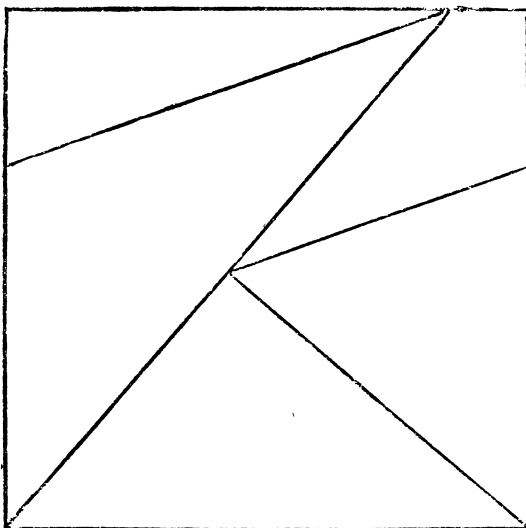
Древнегреческий математик Пифагор доказал, что квадраты, построенные на катетах прямоугольного треугольника, всегда можно разрезать на такие части, из которых составляется квадрат, построенный на гипотенузе.

Существует много способов такой перекройки квадратов. Мы здесь привели один из них.

16. Из прямоугольных треугольников квадрата № 8 составьте последовательно: а) ромб, б) прямоугольник, в) параллелограм, г) трапецию.



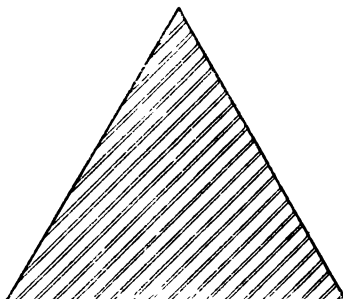
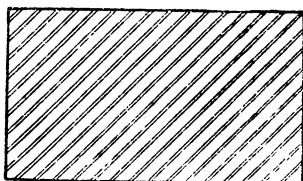
Превратите квадрат № 9



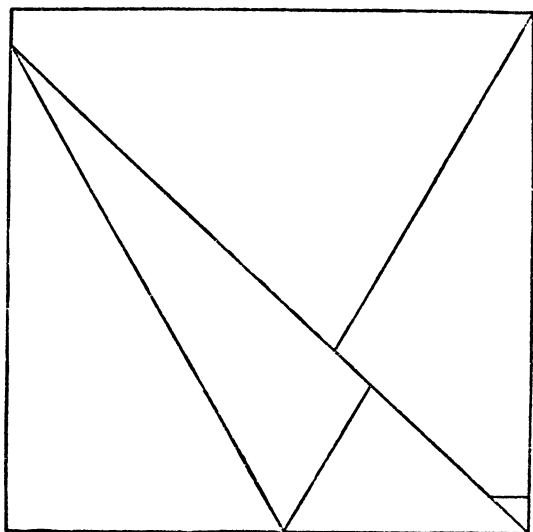
КВАДРАТ № 9

17 — в равносторонний
треугольник, а затем

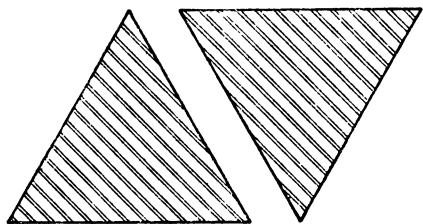
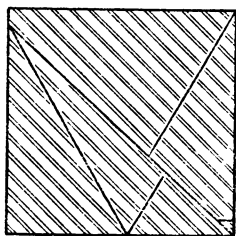
18 — в прямоугольник.



19. Превратите квадрат № 10

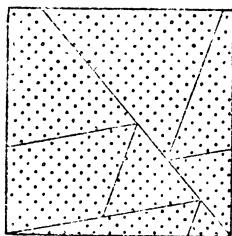
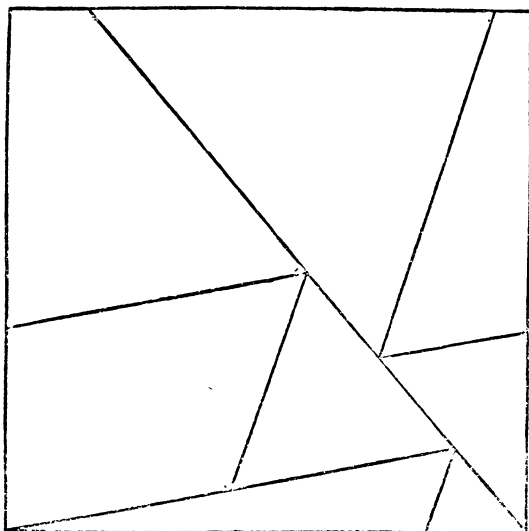


КВАДРАТ № 10



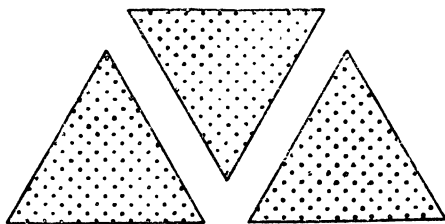
в два равных
равносторонних
треугольника.

20. Квадрат № 11

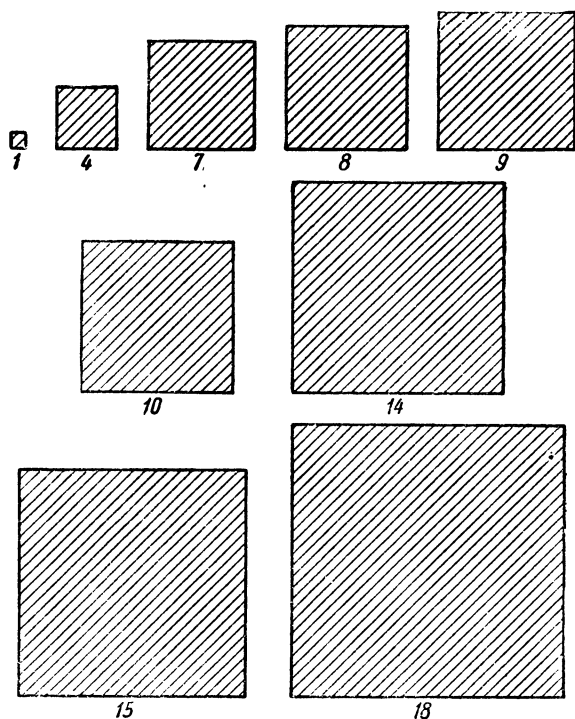


КВАДРАТ № 11

разрезан по-иному.
Из его частей мож-
но составить три
равных равнове-
ронных треуголь-
ника.



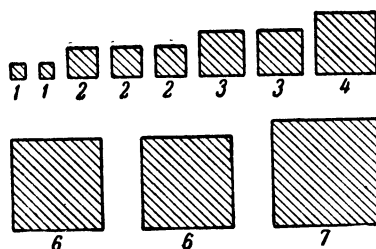
21. Из девяти квадратов со сторонами, равными 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 и 18 единицам,



составить прямоугольник.

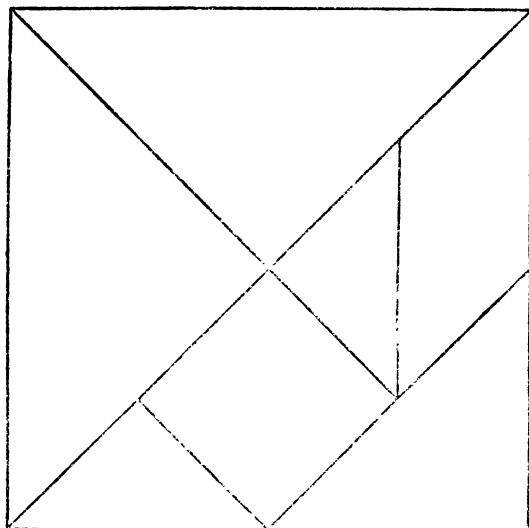
Решая эту и следующую головоломки, придерживайтесь правила упаковщиков: начинать укладку с большего предмета.

22. Вот 11 квадратов



из которых требуется составить один квадрат.

23. Очень остроумно разрезал квадрат ещё несколько тысяч лет тому назад китайский учёный Та-нг



КВАДРАТ № 12
(чёрный!)

Вероятно, эти части квадрата первоначально служили для демонстрации геометрических фигур. В самом деле, вы легко составите из частей чёрного квадрата



прямоугольник, параллелограм, трапецию и т. д.

С течением времени было замечено, что из этих частей можно составить множество фигур-силуэтов самой причудливой формы, употребляя для составления каждой фигуры все семь частей квадрата. Так создалась увлекательная игра-головоломка «танграм», получившая широкое распространение, в особенности на своей родине — в Китае. Там эта игра известна так же широко, как, например, у нас шахматы. Устраиваются даже специальные состязания на составление наибольшего количества фигур с наименьшей затратой времени. Победители получают специальные призы.

Предлагаем и нашим читателям из всех частей чёрного квадрата № 12 составить двадцать пять фигур, изображённых на следующей странице. После этих интересных упражнений, попытайтесь создавать из всех частей чёрного квадрата № 12 и другие, новые картинки-силуэты, задавая сами себе тему, проявляя свой вкус и изобретательность. Наиболее удачные силуэты перерисуйте и таким образом вы будете пополнять своеобразную коллекцию фигур, которые можно составить из чёрного квадрата.

Сделав несколько экземпляров этого квадрата, вы можете организовать коллективную игру по составлению «танграма».



Мостик.



Молоток.



Наковальня.



Револьвер.



Кепка.



Женщина
у зеркала.



Молодая
женщина.



Восьмёрка.



Пожилая
женщина.



Женщина
с платком



Журавль.



Кошка.



Кенгуру.



Заяц.



Страус.



Тендер.



Паровоз.



Свечка.



Домик.



Трубка.



Всадник.



Гусь.



Курица.



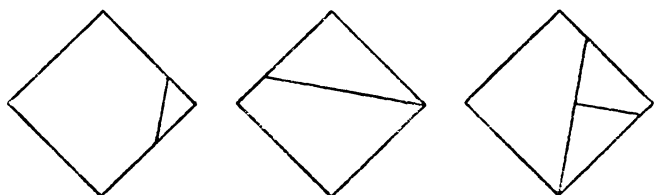
Рыба.



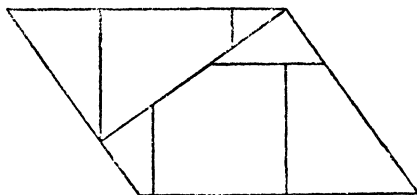
Поросёнок

РЕШЕНИЯ ГОЛОВОЛОМОК

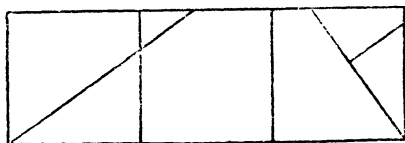
1.



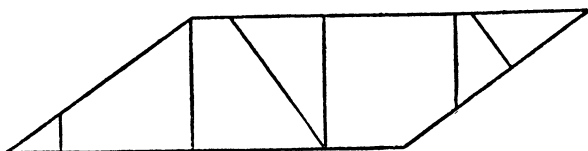
2.



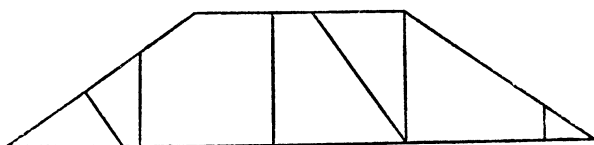
3.



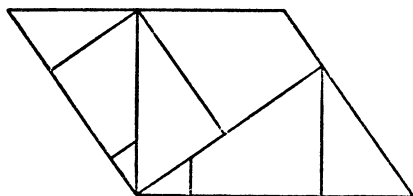
4.



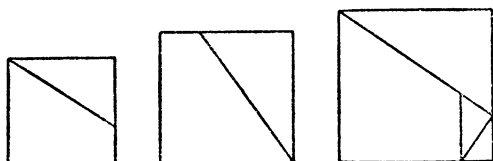
5.



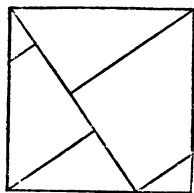
6.



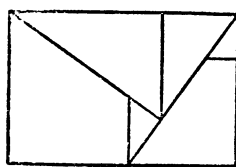
7.



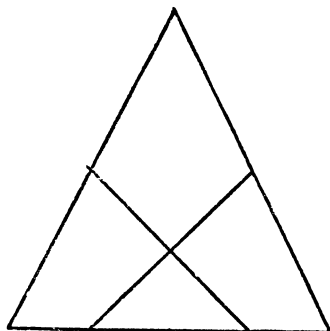
8.



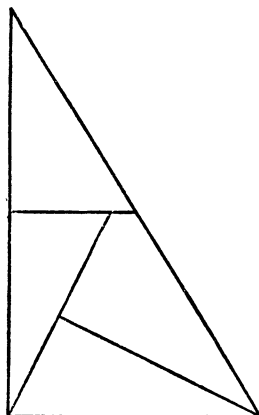
9.



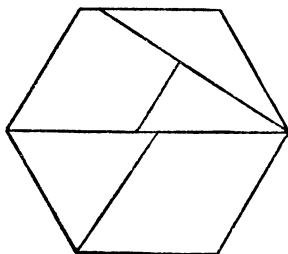
10.



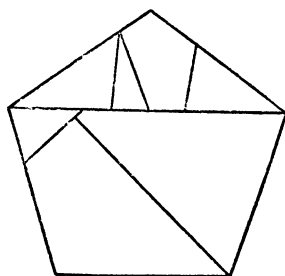
11.



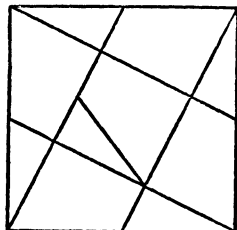
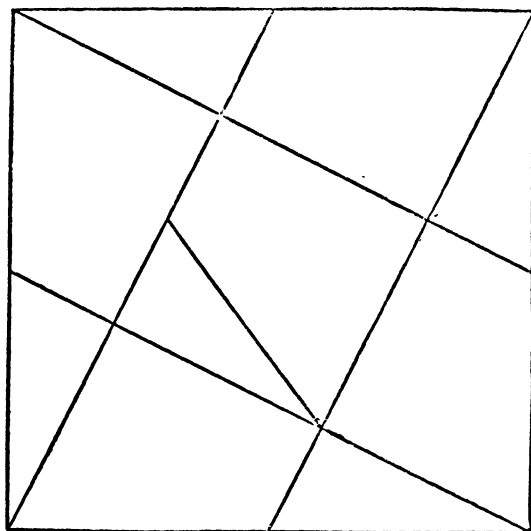
12.



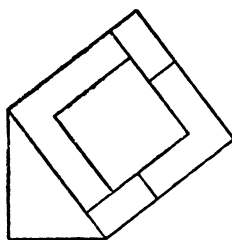
13.



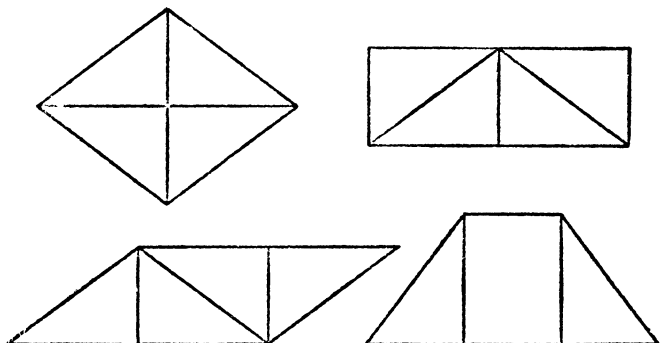
14.



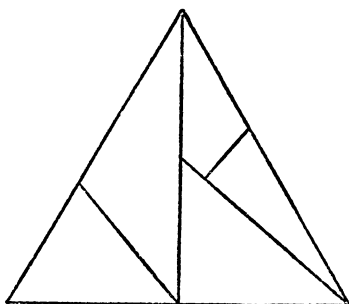
15.



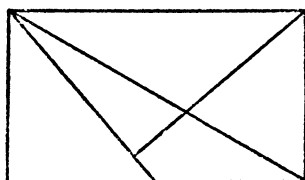
16.



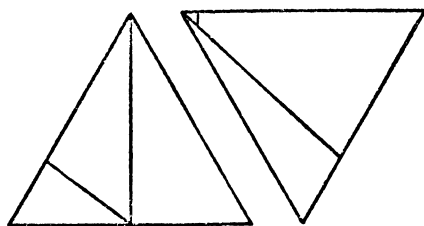
17.



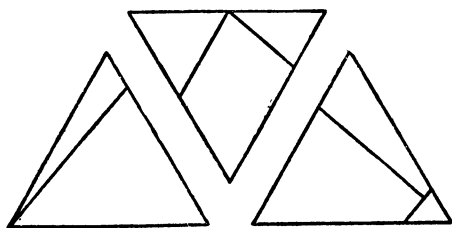
18.



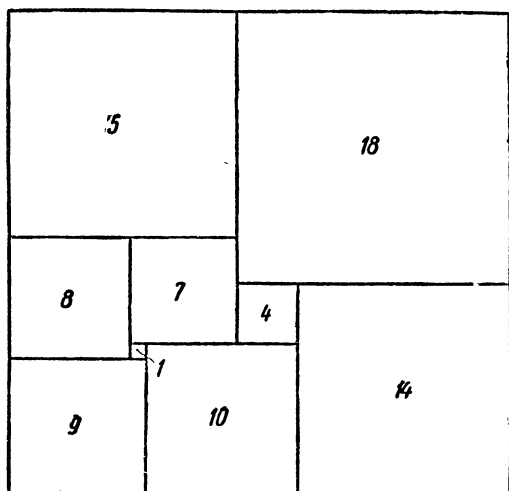
19.



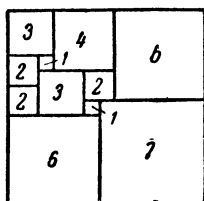
20.



21.



22.



23.



Мостик.



Молоток.



Наковальня.



Револьвер.



Кепка.



Женщина
у зеркала.



Молодая
женщина.



Восьмёрка.



Пожилая
женщина.



Женщина
с платком.



Журавль.



Кошка.



Кенгуру.



Заяц.



Страус.



Тендер.



Паровоз.



Свечка.



Домик.



Трубка.



Всадник.



Гусь.



Курица.



Рыба.



Поросёнок.

Глава 2

ГЕОМЕТРИЯ ПРЕВРАЩЕНИЙ КВАДРАТА



Н ЗАДАЧА РАЗРЕЗЫВАНИЯ КВАДРАТА

Не правда ли: наш «удивительный квадрат», о котором говорилось в первой главе, очень похож на механизм с хорошо прилаженными частями, который можно разобрать и из тех же частей собрать новый механизм.

Для того чтобы из готовых частей квадрата составить его снова или составить несколько иных, заранее указанных фигур, не нужны какие-либо расчёты и построения — достаточно проявить настойчивость, терпение, смекалку.

Однако если читатель хоть немного увлечён математикой, то ему, несомненно, захочется не только складывать многоугольники из готовых частей квадрата, но и самому научиться разрезать квадрат на части, необходимые для составления той или иной фигуры, например прямоугольного или равностороннего треугольника, правильного пятиугольника или шестиугольника, трёх или пяти квадратов и т. д.

На языке геометрии это значит: *найти те геометрические построения, при помощи которых разрезается квадрат, и доказать, что из полученных частей может быть составлена требуемая фигура.*

Такая постановка вопроса сразу превращает каждую головоломку первой главы в более интересную, но и более трудную геометрическую задачу на «разрезывание» фигур.

Своеобразие подобного рода задач в их некоторой неопределённости. Возьмём для примера головоломку I первой главы (стр. 11 этой книги) и сформулируем её как следующую геометрическую задачу:

Показать, каким образом нужно разделить данный квадрат прямолинейными разрезами, чтобы переложением полученных частей можно было составить три сплошных квадрата, равных между собой.

Здесь ничего не сказано о том, как резать данный квадрат и на сколько частей,—отсюда и неопределённость задачи.

Желательно всё же, чтобы число разрезов было возможно меньшим, хотя заранее это число и неизвестно, и неизвестно также, может ли оно быть установлено какими-либо предварительными расчётами. Обычно число делений зависит от способа разрезывания, то-есть от тех геометрических построений, которые были применены при решении задачи.

В поисках наименьшего числа делений можно применять разнообразные приёмы построений и получать тем самым различные решения одной и той же задачи на перекраивание данной фигуры. Таким образом, при решении подобного рода задач открывается широкая возможность проявления находчивости и инициативы, развития геометрической интуиции.

КАК АБУЛ ВЕФА СОСТАВИЛ КВАДРАТ ИЗ ТРЁХ РАВНЫХ КВАДРАТОВ

Задачами превращения одной фигуры в другую путём переложения разрезанных частей занимались ещё в древние времена. Возникли они из потребностей практиков-землемеров и строителей архитектурных сооружений древнего мира. Появились практические приёмы и правила, не обоснованные доказательствами, и естественно, что многие из них были неверны, ошибочны.

Один из самых замечательных арабских математиков Абул Вефа, живший в X веке, решил целый ряд вопросов, относящихся к геометрическому превращению фигур.

В сочинении «Книга о геометрических построениях», дошедшем до нас не полностью в списках его учеников, Абул Вефа пишет:

«В настоящей книге мы займёмся разложением фигур; вопрос этот необходим многим практикам и составляет предмет особенных их разысканий. К таким вопросам мы приходим, когда требуется разложить квадраты так, чтобы получились меньшие квадраты, или когда из нескольких квадратов требуется составить большой квадрат. Ввиду этого мы дадим основные начала, которые относятся к данным вопросам, так как все методы, применяемые рабочими, не основанные на каких-либо началах, не заслуживают доверия и весьма ошибочны; между тем на основании таких методов они производят различные действия».

На одном из собраний геометров и практиков Абул Вефе была предложена задача:

Составить квадрат из трёх равных квадратов.

Познакомимся с тем решением, которое дал Абул Вефа.

Он разрезал квадраты I и II по диагоналям и каждую из половинок приложил к квадрату III, как показано на рис. 1.

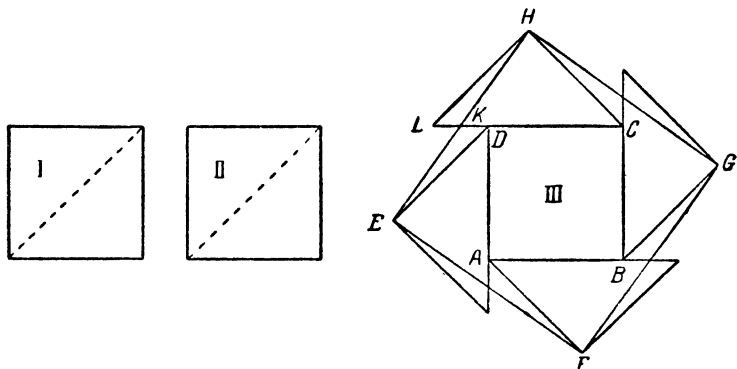
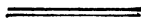


Рис. 1.

Затем он соединил отрезками прямых вершины E , F , G и H . Полученный четырёхугольник $EFGH$ оказался искомым квадратом.

Доказательство сразу следует из равенства образовавшихся маленьких треугольников HLK , EKD и остальных таких же ($HL=ED$; углы HLK и EDK — по 45° и $\angle HKL = \angle EKD$).

Приведённое решение, по словам Абул Вефы, «точно и вместе с тем удовлетворяет практиков».



ДВА СПОСОБА ПРЕВРАЩЕНИЯ КВАДРАТА В ТРИ РАВНЫХ КВАДРАТА

Поставим теперь задачу о превращении одного квадрата в три равных квадрата.

Как было сказано на стр. 36, задача состоит в том, чтобы разделить данный квадрат прямолинейными разрезами на такие части, переложением которых можно составить три отдельных равных квадрата.

Можно было бы воспользоваться способом Абул Вефы, превратившего три равных квадрата в один квадрат. Но при этом, как видно из рис. 1, данный квадрат пришлось бы делить на 9 частей.

Однако из рассмотрения головоломки I (стр. 10 — 11) видно, что эту задачу можно решить, разделив данный квадрат только на 7 частей.

Но и это не предел. Число необходимых делений квадрата можно довести и до 6.

Мы сейчас изложим два способа превращения квадрата в три равных квадрата.

Оба способа исходят из следующей идеи.

Если из трёх искомых квадратов составить прямоугольник, то одна его сторона будет в три раза больше другой. Следовательно, возможен такой путь решения задачи: сначала превратить данный квадрат в прямоугольник, одна сторона которого втрое длиннее другой, а затем этот прямоугольник двумя разрезами разбить на три квадрата.

Рассмотрим сначала, как был разрезан квадрат для первой головоломки. Пусть это и будет

Первый способ (деление на 7 частей).

Примем сторону данного квадрата $ABCD$ (рис. 2) за единицу. Тогда его площадь будет равна одной квад-

Из прямоугольного треугольника ADE по теореме Пифагора будем иметь:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2,$$

или

$$AE^2 = 1 + 2 = 3 \text{ и } AE = \sqrt{3}.$$

Из вершины B квадрата проведём $BF \parallel AE$ до пересечения в точке F с продолжением DC . Фигура $ABFE$ — параллелограмм ($BF \parallel AE$, $EF \parallel AB$), равновеликий квадрату $ABCD$ (то-есть параллелограмм и квадрат имеют равные площади). В самом деле, площадь того и другого вычисляется по формуле

$$S = AB \cdot AD.$$

Из точек B и F опустим перпендикуляры BK и FH на прямую AE .

Получим прямоугольник $BFHK$, равновеликий параллелограмму $ABFE$ ($S = BF \cdot BK$). Но параллелограмм $ABFE$, как доказано, равновелик квадрату $ABCD$; следовательно, прямоугольник $BFHK$ равновелик данному квадрату.

Покажем теперь, что квадрат $ABCD$ и прямоугольник $BFHK$ не только равновелики, но и *равносоставлены*, то-есть могут быть составлены из одних и тех же частей.

Отложим на стороне AD отрезок $AL = BG$, а на стороне BF — отрезок $BM = AG$ и проведём $LN \parallel AE$ и $MP \perp EF$. Тремя разрезами AG , BK и LN квадрат $ABCD$ разделился на четыре части, обозначенные на рис. 2 цифрами I, II, III и IV.

На такие же части делится и прямоугольник $BFHK$ разрезами EF , MP и BG . В самом деле, треугольник BKG (III) — общий для квадрата и прямоугольника;

$$\triangle ABK = \triangle EFH \quad (\text{IV})$$

($AB = EF$, как противоположные стороны параллелограмма, углы K и H — прямые, углы при вершинах A и E равны, как соответственные).

Точки L , G и M одинаково удалены от прямой DF (по построению); следовательно, $LD = GC = MP$; кроме того, $\angle DLN = \angle PMF$ (как углы с соответственно параллельными сторонами); отсюда

$$\triangle LDN = \triangle MPF \quad (\text{I})$$

и значит, $LN=MF=GE$. Легко заметить, далее, что и пятиугольник $ALNCG$ (II) равен пятиугольнику $BGERM$ (все стороны и углы соответственно равны).

Таким образом, из частей I, II, III и IV квадрата $ABCD$ действительно можно составить прямоугольник $BFHK$.

В этом прямоугольнике сторона BF в три раза больше стороны BK . Действительно, отрезок BF равен и парал-

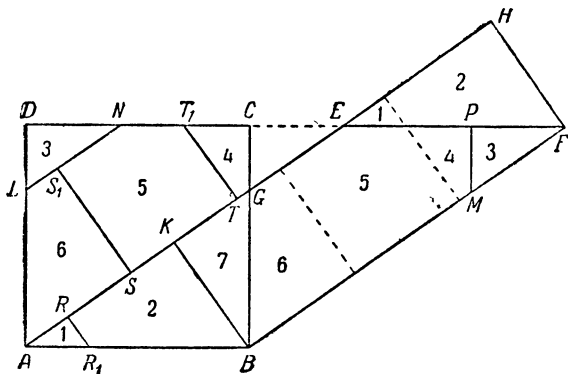


Рис. 3.

лелен отрезку AE , то-есть $BF=\sqrt{3}$, а из равенства площадей квадрата $ABCD$ и прямоугольника $BFHK$ имеем: $BK \cdot BF=1$, откуда

$$BK=\frac{1}{BF}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{BF}{3}.$$

Такой прямоугольник двумя разрезами легко превращается в три равных квадрата.

Для удобства рассмотрения этой последней операции повторим рис. 2 и разделим BF на три равные части (рис. 3).

Через каждую точку деления проведём разрез, параллельный меньшей стороне прямоугольника (на рис. 3 это — штриховые линии); получим три равных квадрата. Перенумеруем заново все составные части этих квадратов и найдём их в основном квадрате $ABCD$ следующим очевидным дополнительным построением: отложим на

прямой AG отрезки KR , AS и ST , каждый из которых равен BK (стороне малого квадрата); из точек R , S и T восставим перпендикуляры RR_1 , SS_1 и TT_1 к прямой AG . Легко показать, что образовавшиеся при этом семь частей квадрата $ABCD$ равны соответствующим частям прямоугольника $BFHK$.

Соответственно равные части обеих фигур на рисунке 3 обозначены одинаковыми цифрами.

Вот и весь геометрический «секрет» первой головоломки.

Второй способ (деление на 6 частей).

Попробуйте теперь несколько видоизменить способ превращения квадрата в прямоугольник с отношением сторон 3:1 так, чтобы при разрезании его на три квадрата получилось не 7 частей, а только 6.

Если додумается, то сравните своё решение со следующим.

Примем сторону данного квадрата $ABCD$ за единицу и, таким же образом, как и в первом способе, отложим от вершины D на продолжении стороны DC отрезок $DE = \sqrt{3}$ (рис. 4).

Соединим вершину A квадрата с точкой E прямой AE , которая пересечёт BC в точке F *).

На DE , как на стороне, построим такой прямоугольник $DEGK$, вторая сторона которого DK была бы равна $\frac{DE}{3}$:

$$DK = \frac{DE}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

точку пересечения прямых KG и AE обозначим буквой L .

*) Заметим мимоходом, что при таком построении образуется угол DAE , равный 60° . Действительно,

$$\operatorname{tg} \angle DAE = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3};$$

отсюда

$$\angle DAE = 60^\circ.$$

Значит, $\angle EAB = 30^\circ$, так что, если ещё угол DAE геометрическим же путём разделить пополам, то будет осуществлена трисекция (деление на три равные части) прямого угла.

Покажем, что квадрат $ABCD$ и прямоугольник $DEGK$ равноставлены *).

Для этого достаточно доказать, что

$$\triangle AKL = \triangle FCE$$

и

$$\triangle ABF = \triangle LGE.$$

Имеем:

$$CE = DE - DC = \sqrt{3} - 1, \quad (1)$$

$$AK = AD - DK = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

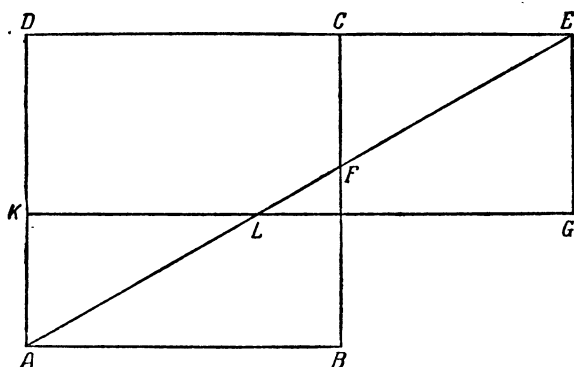


Рис. 4.

Кроме того, $\triangle AKL \sim \triangle ADE$. Из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{KL}{DE} = \frac{AK}{AD},$$

$$KL = \frac{AK \cdot DE}{AD} = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} - 1. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем: $CE = KL$; значит,

$$\triangle AKL = \triangle FCE.$$

*) Напоминаем, что слово *равноставлены* значит: «могут быть составлены из одних и тех же частей».

Из равенства этих треугольников следует:

$$FC = AK = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$BF = BC - FC = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

и значит,

$$BF = GE. \quad (3)$$

Далее:

$$LG = KG - KL = \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = 1,$$

и значит,

$$LG = AB. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем:

$$\triangle ABF = \triangle LGE.$$

Заметим попутно, что здесь для превращения квадрата в требуемый прямоугольник достаточно разрезать

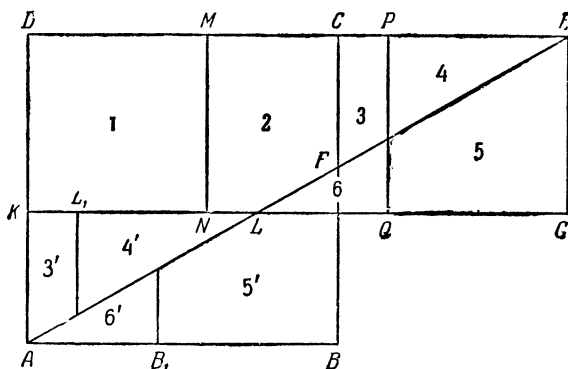


Рис. 5.

его на 3 части ($KDCFL$, AKL и ABF), в то время как при первом способе он разрезывался на 4 части.

Разобьём теперь прямоугольник $DEGK$ на три квадрата разрезами MN и PQ (рис. 5) и части перенумеруем, как указано на рисунке.

Нетрудно найти соответствующие части в данном квадрате. Отложим $LL_1=EP$ и перпендикуляром к LK из точки L_1 разобьём треугольник AKL на части 3' и 4', равные частям 3 и 4. Отложим $BB_1=GQ$ и перпендикуляром к AB из точки B_1 разобьём треугольник ABF на части 5' и 6', равные частям 5 и 6. Части 1 и 2 — общие для данного квадрата и для квадратов $DMNK$ и $MPQN$. Всех частей — 6.

Так «усовершенствовалось» решение этой задачи за 1000 лет: с 9 частей до 6 частей. Но никто ещё не доказал, что невозможно дальнейшее уменьшение числа частей, необходимых для превращения квадрата в три равных квадрата; поэтому друзьям математики не возбраняется либо попытаться это доказать, либо продолжать поиски новых решений задачи с меньшим, чем 6, числом необходимых частей.



ПРЕВРАЩЕНИЕ КВАДРАТА В РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Откроем теперь геометрический «секрет» ещё одной из головоломок первой главы, — головоломки **17** на стр. 21.

Данный квадрат $ABCD$ требуется разрезать прямолинейными разрезами на такие части, из которых можно было бы составить равносторонний треугольник.

Можно заранее вычислить высоту искомого треугольника и найти её при помощи геометрических построений.

Пусть сторона квадрата равна a . Тогда его площадь, а следовательно, и площадь равновеликого ему равностороннего треугольника равна a^2 . Если сторона треугольника x , а высота его h , то $\frac{x \cdot h}{2} = a^2$; известно также, что в равностороннем треугольнике $\frac{x}{2} = \frac{h\sqrt{3}}{3}$; следовательно, $\frac{h^2\sqrt{3}}{3} = a^2$, отсюда $h^2 = \frac{3a^2}{\sqrt{3}} = a^2\sqrt{3}$ и

$$h = a\sqrt[4]{3}.$$

Так как $h^2 = a^2\sqrt{3} = a \cdot a\sqrt{3}$, то построить h можно как среднее пропорциональное между a и $a\sqrt{3}$. Для этого продолжим сторону AB (рис. 6) и на этом продолжении сделаем засечку радиусом $DE = 2a$ из центра D . Из прямоугольного треугольника DAE имеем:

$$AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Надо построить отрезок, средний пропорциональный к отрезкам $AB=a$ и $AE=a\sqrt[4]{3}$. Построим полуокружность на AE , как на диаметре, и точку F её пересечения со стороной BC соединим отрезком с вершиной A . По известной теореме геометрии, отрезок AF — средний пропорциональный к отрезкам AB и AE , и следовательно,

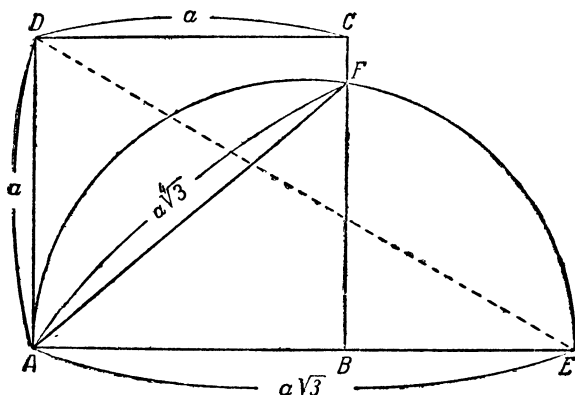


Рис. 6.

отрезок AF равен высоте $a\sqrt[4]{3}$ искомого равносоставленного треугольника.

Вернёмся к квадрату $ABCD$ (рис. 7). Отметим на стороне DC точку K так, чтобы отрезок AK равнялся высоте искомого треугольника $a\sqrt[4]{3}$ (отрезок такой величины предварительно был найден: AF на рисунке 6). Через вершину B проведём $BL \parallel AK$ до пересечения с продолжением стороны DC в точке L и $BM \perp BL$ до пересечения с AK в точке M . Построим ML и точку пересечения со стороной BC обозначим буквой N . Построим ещё $KP \parallel ML$. Разрезав квадрат $ABCD$ по AK , MN , BM и KP , получим 5 частей, из которых можно составить равносоставленный треугольник.

Для доказательства отложим на продолжении MB $BQ = MB$ и точку Q соединим с точкой L . Так как $MB = BQ$ и $BL \perp MQ$, то треугольник MLQ — равнобедренный: $ML = QL$. Докажем, что он, кроме того, — равносоставленный и равносоставленный с квадратом $ABCD$.

По построению $BL \parallel AK$ и $BL = AK = a\sqrt[4]{3}$. Из прямоугольного треугольника MBL имеем:

$$ML^2 = BL^2 + MB^2 = a^2\sqrt{3} + MB^2. \quad (1)$$

Прямоугольные треугольники AMB и ADK подобны ($\angle DKA = \angle MAB$, как внутренние накрест лежащие при

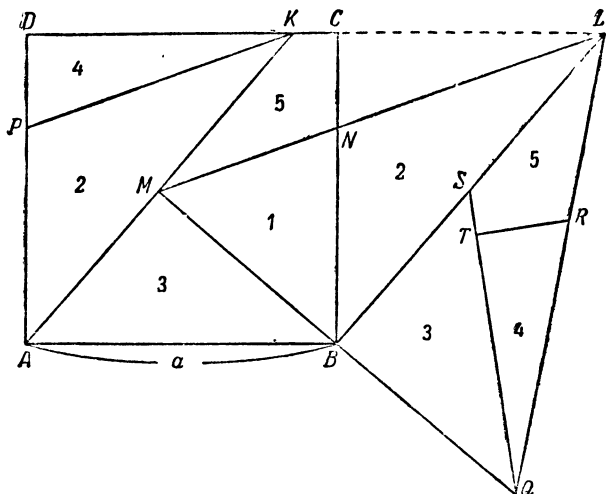


Рис. 7.

параллельных DC и AB и секущей AK). Из подобия этих треугольников имеем:

$$\frac{MB}{AB} = \frac{AD}{AK}; \quad \frac{MB}{a} = \frac{a}{a\sqrt[4]{3}}; \quad MB = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}.$$

Подставляя значение MB в (1), получим:

$$ML^2 = a^2\sqrt{3} + \frac{a^2}{\sqrt{3}} = \frac{4a^2}{\sqrt{3}}; \quad ML = 2\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$$

или $ML = 2MB$, т. е.

$$ML = MQ.$$

Итак, $ML = QL = MQ$; треугольник MLQ — равно-
сторонний.

Треугольник BMN —общий для квадрата и равно-
стороннего треугольника; отметим его цифрой 1.

$\triangle BNL = \triangle APK$ ($BL = AK$ и углы, прилежащие к
этим сторонам, соответственно равны, как углы с парал-
лельными сторонами); отметим оба этих треугольника
цифрой 2.

На BL отложим $BS = MA$ и соединим точки S и Q
отрезком SQ ; образовавшийся треугольник SBQ равен
треугольнику AMB (по двум катетам), отметим их
цифрой 3*).

Из равенства этих треугольников имеем:

$$QS = AB \quad (2)$$

и

$$\angle BSQ = \angle BAM. \quad (3)$$

Но $\angle BSQ$ —внешний угол треугольника QSL ; значит,

$$\angle SQL = \angle BSQ - \angle SLQ. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\angle BAM = \angle AKD = \angle AKP + \angle PKD.$$

Отсюда

$$\angle PKD = \angle BAM - \angle AKP;$$

но

$$\angle AKP = \angle MLB = \angle SLQ,$$

следовательно,

$$\angle PKD = \angle BAM - \angle SLQ. \quad (5)$$

Из (3) и (5) имеем:

$$\angle PKD = \angle BSQ - \angle SLQ. \quad (6)$$

Из (4) и (6) имеем:

$$\angle SQL = \angle PKD. \quad (7)$$

На QS отложим $QT = DK$, причём $DK < DC$, а $DC =$
 $= AB = QS$; значит, $QT < QS$.

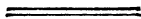
*) Треугольник SBQ может быть совмещён с треугольником AMB
только после того, как мы его перевернём другой стороной.

Построим $TR \perp QT$. Из (2) и (7) имеем равенство двух треугольников: $\triangle QTR = \triangle KDP$; обозначим эти треугольники цифрой 4.

Читатель без труда установит равенство остальных двух частей, отмеченных на рисунке цифрами 5; тем самым будет доказана равновеликость квадрата $ABCD$ и треугольника QLM .

В изложенном способе превращения квадрата в равно-
сторонний треугольник применяется не только перекла-
дывание частей квадрата, но и перевёртывание неко-
торых из них на другую сторону.

Разумеется, и для этой задачи возможны другие ре-
шения. Можно поискать, например, такое решение, при
котором не пришлось бы перевёртывать на другую сторону
ни одной части квадрата, или попытаться разрезать
квадрат на меньшее число частей.



ПРЕВРАЩЕНИЕ РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА В КВАДРАТ

Те же построения можно использовать и для решения обратной задачи — о превращении равностороннего треугольника в квадрат.

Пусть $\triangle MQL$ (тот же рис. 7 на стр. 49) — данный равносторонний треугольник; его площадь

$$S = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4},$$

где x — сторона данного треугольника. Если a — сторона искомого квадрата, равновеликого данному треугольнику, то

$$a^2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда $a = \frac{x}{2} \sqrt[4]{3}$ или

$$\begin{aligned} a &= \frac{x}{2} \sqrt[4]{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{x^2}{4} \sqrt{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{x}{4} \sqrt{3x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4} \sqrt{3x \cdot x}}. \end{aligned}$$

Отрезок a можно определить следующим построением: сначала построить отрезок, средний пропорциональный к отрезкам $3x$ и x , а затем — средний пропорциональный к найденному отрезку и отрезку $\frac{x}{4}$.

Построим высоту LB данного треугольника и отложим отрезок $BA = a$ так, чтобы точка A легла на прямую, проведённую через вершину M и параллельную LB . Через

вершину L проведём прямую, параллельную BA , и из точек B и A опустим на неё перпендикуляры BC и AD . Нетрудно видеть, что прямоугольник $ABCD$ — квадрат, равновеликий данному треугольнику.

В самом деле, прямоугольные треугольники AMB и ADK подобны ($\angle MBA = \angle DAK$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Следовательно,

$$\frac{BM}{BA} = \frac{AD}{AK} \quad \text{или} \quad AD = \frac{BM \cdot AK}{BA}.$$

Но

$$BM = \frac{x}{2}, \quad BA = a = \frac{x}{2} \sqrt{3}, \quad AK = LB$$

(как отрезки параллельных между параллельными). Так как $LB = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, то

$$AK = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

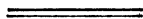
и

$$AD = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}\sqrt{3}} = \frac{x}{2} \sqrt{3} = BA;$$

значит, $ABCD$ — квадрат.

Проведём теперь $QS = BA$ и отложим $LR = MN$; проведём $RT \perp QS$ и $KP = QR$.

Равенство соответствующих частей треугольника MQL и квадрата $ABCD$ доказать нетрудно.



КАК РАСКРОИТЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАМ, ЧТОБЫ ИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ЧАСТЕЙ МОЖНО БЫЛО СОСТАВИТЬ КВАДРАТ?

После успешного превращения равностороннего треугольника в квадрат возникает желание попытаться перекроить в квадрат любой данный многоугольник. Возможен ли общий метод для решения такой задачи?

Ответ на этот вопрос выявится к концу главы. Пока же будем накапливать опыт, решая отдельные частные задачи.

Обратимся к параллелограмму. Напрашивается такой приём превращения его в квадрат: перекроить параллелограмм в прямоугольник (это легко выполнить при помощи одного разреза) и затем искать пути превращения полученного прямоугольника в квадрат. Обдумайте пока этот приём самостоятельно. (См. также задачу 6 на стр. 59.) А здесь мы предложим способ непосредственного превращения произвольного параллелограмма в квадрат.

Пусть a и b — стороны параллелограмма $ABCD$ [рис. 8 и 9*]; h — высота, соответствующая основанию a , причём $a \geq b$. Так как, кроме того, $b > h$, то $a > h$.

Найдём отрезок $r = \sqrt{ah}$ — средний пропорциональный к отрезкам a и h — и из A , как из центра, проведём дугу радиуса r . Пересечёт ли эта дуга сторону DC ? Да, если $r > h$. Но так оно и есть. При условии $a > h$ имеем: $\sqrt{ah} > h$, или $r > h$. При том же условии имеем: $\sqrt{ah} < a$ или $r < a$.

*) Мы рассматриваем одновременно два случая — один, изображённый на рис. 8, другой — на рис. 9. Различие между ними будет указано дальше.

Таким образом, $h < r = \sqrt{ah} < a$.

Одна из точек пересечения дуги со стороной CD может:

1) оказаться на отрезке CD , например, как на рис. 8 (точка E),

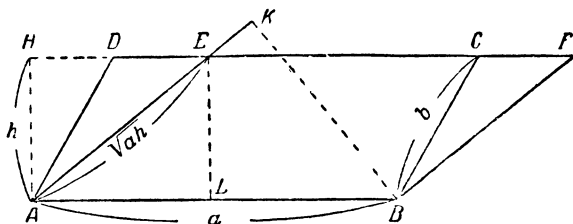


Рис. 8.

2) или на отрезке HD , например, как на рис. 9 (точка E_1),
3) или же может совпасть с вершиной D .

В первых двух случаях данный параллелограм следует превратить в другой с той же высотой h и тем же

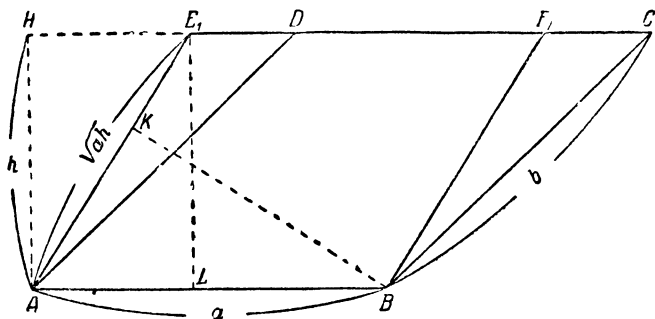


Рис. 9.

основанием AB и отрезком AE (или AE_1) в качестве другой стороны. Для этого в первом случае достаточно переложить треугольник ADE в положение BCF , а во втором, наоборот, переложить треугольник BF_1C в положение AE_1D . В третьем случае параллелограмм не нуждается в преобразовании.

Итак, всякий параллелограмм может быть превращён в другой с сохранением высоты h и большей стороны a

данного параллелограмма в качестве основания, причём боковой стороной нового параллелограмма будет $r = \sqrt{ah}$.

Такой параллелограмм обладает тем свойством, что расстояние BK вершины B от боковой стороны равно длине боковой стороны, то-есть $BK = \sqrt{ah}$.

Для доказательства этого любопытного свойства проведём $EL \perp AB$ (рис. 8) или $E_1L \perp AB$ (рис. 9). Прямоугольные треугольники AEL и ABK (или AE_1L и ABK) подобны, так как имеют общий угол KAB .

Из подобия треугольников имеем:

$$\frac{AE}{EL} = \frac{AB}{BK}, \text{ где } AE = \sqrt{AB \cdot EL}.$$

Отсюда

$$BK = \frac{AB \cdot EL}{AE} = \frac{AB \cdot EL}{\sqrt{AB \cdot EL}} = \sqrt{AB \cdot EL},$$

и, следовательно,

$$BK = AE$$

(или, проводя те же рассуждения в случае рис. 9, $BK = AE_1$)

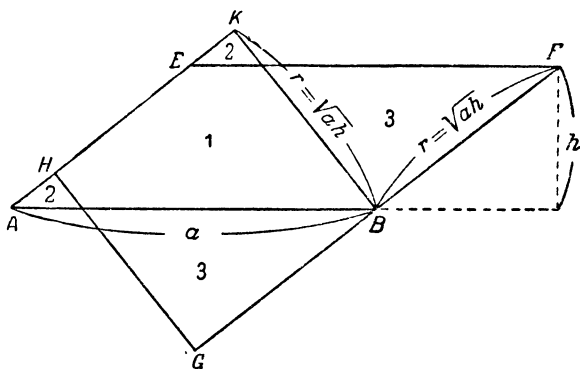


Рис. 10.

Пусть теперь $ABFE$ (рис. 10 и 11) — именно такой параллелограмм, с основанием $AB = a$, высотой h и боковой стороной $AE = r = \sqrt{ah}$. Для превращения его в квадрат опустим перпендикуляр BK из вершины B на сторону AE (рис. 11) или её продолжение (рис. 10). Как

было доказано, в обоих случаях он равен боковой стороне (\sqrt{ah}) параллелограмма.

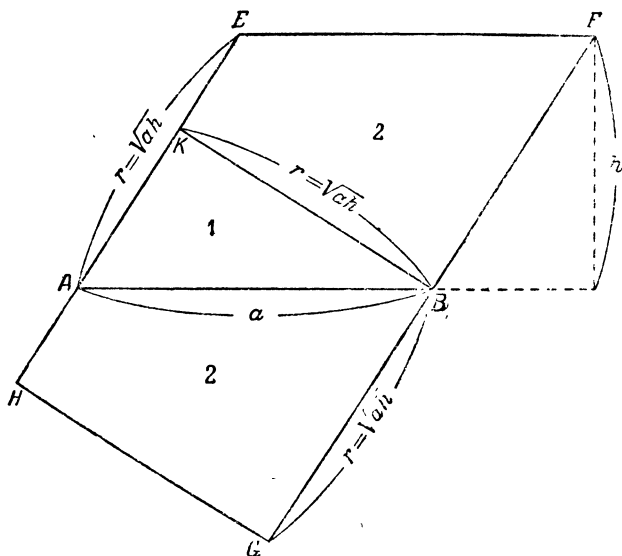


Рис. 11.

Вдоль AE и вдоль BF откладываем

$$KH=BK=\sqrt{ah} \text{ и } BG=BK=\sqrt{ah}.$$

Соединяем H с G и получаем квадрат $BKHG$, равносоставленный с параллелограммом $ABFE$. Равенство частей, отмеченных одинаковыми цифрами, доказать нетрудно.

Так может быть превращён в квадрат всякий параллелограм.



15 ЗАДАЧ

Используя показанные геометрические приёмы превращений квадрата и придумывая свои пути и способы, самостоятельно решите несколько задач, связанных с превращением квадрата. В конце главы имеются ответы и решения, к которым обращайтесь в случае затруднений.

1. Нарисуйте какой-нибудь квадрат. Как надо его разрезать, чтобы переложением полученных частей можно было составить 5 равных квадратов?

2. Нарисуйте какой-нибудь квадрат и превратите его в 8 равных квадратов.

3. В математическом сочинении Галилея «Элим» приведена задача, предложенная каирским учёным Али ученому-врачу и математику Дель-Медиче, современнику Галилея:

«Имеем четырёхугольную доску размером 5×2 .

Построить из этого четырёхугольника квадрат, разрезав доску только на 4 части».

Трудно сказать, почему учёный XVI века не потребовал разрезать доску только на 3 части, чтобы составить из них квадрат. Может быть он считал это невозможным? В таком случае, он ошибался. Доску размером 5×2 можно превратить в квадрат, разрезав её не только на 4, но и на 3 части.

Найдите оба решения.

4. В предыдущей задаче предлагалось составить квадрат из четырёх или даже из трёх кусков прямоугольника. Попробуйте сложить квадрат из частей прямоугольника 9×16 , разрезав его только на два куска.

5. Всякий ли прямоугольник можно превратить в квадрат тем же способом, каким решена задача **4**?

6. Как видно из решений задач **3, 4** и **5**, для некоторых частных видов прямоугольников достаточно трёх, двух разрезов и даже иногда одного разреза, чтобы превратить прямоугольник в квадрат.

Способы, которые при этом употреблялись, с небольшими дополнениями могут быть применены к превращению любого прямоугольника в квадрат.

Разработайте какой-нибудь из этих способов для превращения произвольного прямоугольника в квадрат. О числе делений можете не заботиться.

7. Как превратить в квадрат произвольный прямоугольный треугольник?

8. Применение единого приёма для превращения любого прямоугольного треугольника в квадрат в некоторых случаях даёт не наименьшее возможное число разрезов. Но для превращения в квадрат куска кожи, имеющего форму прямоугольного треугольника (рис. 12),

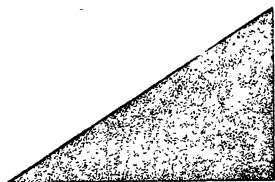


Рис. 12.

можно найти способ разрезывания, при котором число кусков будет не больше четырёх. Геометрическая особенность данного куска кожи в том, что отношение большего катета к меньшему меньше 2. Найдите решение.

9. При раскрое тех или иных материалов может встретиться и обратная задача: превратить данный квадрат в такой прямоугольный треугольник, у которого задано отношение большего катета к меньшему меньше 2. Решите задачу, разрезав квадрат не больше чем на 4 части.

10. На страницах 52—53 этой книги мы перекраивали в квадрат один равносторонний треугольник. Постарайтесь перекроить в квадрат два одинаковых равносторонних треугольника (рис. 13, а).

Если один из них разрезать по высоте на две части (I и II) и приложить их ко второму треугольнику (III), то получится прямоугольник (рис. 13, б), который двумя разрезами превращается в квадрат. Получится 6 кусочков — по 3 в каждом треугольнике. Сделайте!

Если же, не разрезая данные треугольники, сразу сложить их в параллелограмм (рис. 14), то при превращении его в квадрат способом, приведённым на странице 54, получится только 5 кусочков. Убедитесь в этом!

Оба способа, разумеется, можно использовать и для обратного превращения квадрата в два равных равносторонних треугольника (см. головоломку **19** на стр. 22).

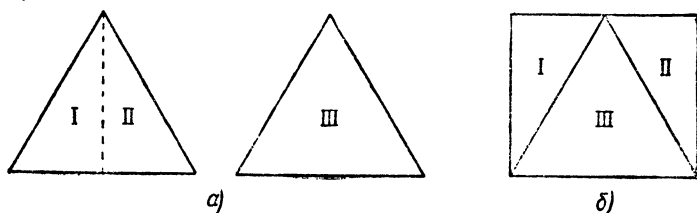


Рис. 13.

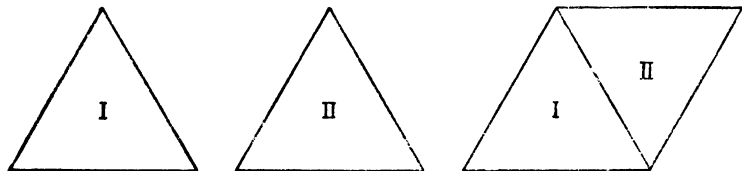


Рис. 14.

11. Нарисуйте какой-нибудь квадрат. Как надо его разрезать, чтобы из полученных частей можно было составить два квадрата, причём площадь одного из них должна быть вдвое больше площади другого.

12. Как разрезать квадрат, чтобы из его частей составить три квадрата с отношением площадей 2:3:4?

13. Удалось ли вам решить наши головоломки **12** и **13** на стр. 16 и 17 — составить из частей квадрата правильный шестиугольник или правильный пятиугольник? Вероятно, пришлось повозиться! Но, конечно, ещё труднее геометрически найти необходимые для этого части.

Для решения такой задачи удобнее считать, что дан правильный шестиугольник (или пятиугольник) и требуется преобразовать его в квадрат.

Сделайте это сначала для правильного шестиугольника (рис. 15, а) и постарайтесь ограничиться только пятью частями.

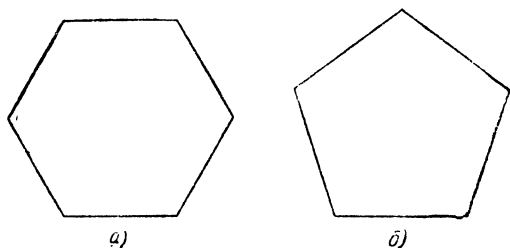


Рис. 15.

14. А теперь превратите в квадрат данный правильный пятиугольник (рис. 15, б) и постарайтесь ограничиться семью частями.

15. Цепочка состоит из трёх равных серебряных квадратных пластинок, спаянных вершинами так, что стороны одного квадрата служат продолжениями сторон

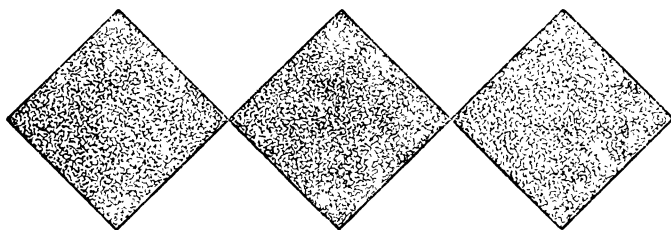
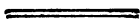


Рис. 16.

другого (рис. 16). Требуется разрезать цепочку по двум парам параллельных линий и из получившихся частей составить брошку в форме ромба.



ВОЗМОЖНОСТЬ ПРЕВРАЩЕНИЙ КВАДРАТА

Решая головоломки и задачи на превращение квадрата в другую равновеликую ему фигуру или, наоборот, какого-либо многоугольника в квадрат, мы тем самым устанавливаем возможность такого превращения.

Интересно, как далеко распространяется эта способность квадрата перекраиваться в другую фигуру без всякой потери площади.

Можно ли перекроить квадрат в любой желаемый многоугольник той же площади или, что то же самое, — можно ли любой многоугольник перекроить в равновеликий ему квадрат?

Ответ на эти вопросы даёт следующая теорема:

*Всякий многоугольник можно превратить в равновеликий ему квадрат *).*

*) Эта теорема рассматривается только для простых многоугольников.

Многоугольник — *простой*, если его контур делит плоскость только на две области: одну внешнюю и одну внутреннюю. Таковы, например, многоугольники, изображённые на рис. 17.



Рис. 17.

Многоугольник — *непростой*, если его контур делит плоскость больше чем на две области (например, две внутренние и одна

Доказательство будет заключаться просто в том, что мы укажем одну из возможных последовательностей превращений многоугольника в квадрат, пригодную для любого многоугольника.

Поэтому основные ступени доказательства нашей теоремы будет удобно сформулировать в виде нескольких лемм:

1. *Всякий многоугольник можно расечь на некоторое определённое число треугольников.*

2. *Всякий треугольник равносоставлен с некоторым параллелограмом.*

Ещё раз напоминаем, что два многоугольника называются равносоставленными, если один из них можно разрезать на такие части, которые, будучи сложены иначе, дают второй многоугольник.

Таким образом, каждый из треугольников, на которые рассекается многоугольник, мы можем превратить в параллелограм.

Далее:

3. *Всякий параллелограмм можно превратить в квадрат.*

4. *Если два многоугольника порознь могут быть превращены в третий, то первый может быть превращён во второй («свойство транзитивности»).*

Из лемм 2, 3 и 4 следует пятая:

5. *Всякий треугольник можно превратить в равновеликий ему квадрат.*

внешняя). Несколько непростых многоугольников изображено на рис. 18.

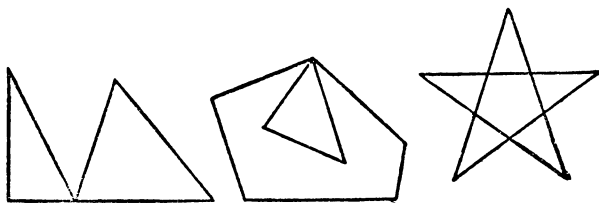


Рис. 18.

В элементарной геометрии рассматриваются только простые многоугольники. В нашей книге всюду, говоря о многоугольниках, мы также подразумеваем только простые многоугольники.

Таким образом, все треугольники, на которые расщепляется любой данный многоугольник, могут быть превращены в соответствующие квадраты.

Возникает вопрос: как все эти квадраты сложить в один? Ответ даёт последняя лемма:

6. *Каждые два квадрата можно превратить в один.*

Превращая каждые два квадрата в один, получим в конце концов один квадрат, который и будет равносоставлен с данным многоугольником.

Вот и вся схема доказательства возможности превращения многоугольника в квадрат.

Доказательство каждой леммы, в свою очередь, носит конструктивный характер, то-есть состоит в указании способа того превращения фигур, о котором говорится в лемме.

Лемма 1. Всякий многоугольник можно расщепить на некоторое определённое число треугольников.

Если разрезать многоугольник по диагоналям, соединяющим любую из его вершин с остальными вершинами (диагоналей всегда будет на две меньше числа n сторон многоугольника), то образуется $n - 2$ треугольника.

Лемма 2. Всякий треугольник можно превратить в такой параллелограмм, у которого основание совпадает с одной из сторон треугольника, а высота равна половине соответствующей высоты треугольника.

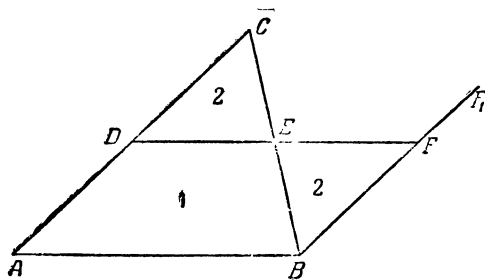


Рис. 19.

Для доказательства проведём среднюю линию DE произвольного треугольника ABC (рис. 19) и продолжим её до пересечения в точке F с прямой BF_1 , проходящей через B и параллельной AC .

Треугольник CDE равен треугольнику BFE ; следовательно, параллелограмм $ABFD$ равносоставлен с треугольником ABC и высота его равна половине высоты треугольника.

Лемма 3. *Всякий параллелограмм можно превратить непосредственно в квадрат.*

Доказательством является способ превращения любого параллелограмма в квадрат, описанный нами на стр. 54—57.

Лемма 4. *Если два многоугольника порознь могут быть превращены в третий, то первый может быть превращён во второй.*

Пусть некоторые многоугольники P и Q порознь могут быть превращены в один и тот же многоугольник R . (На рис. 20 изображён только многоугольник R .) Это

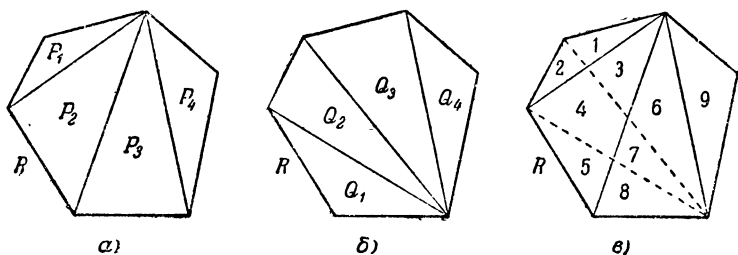


Рис. 20.

значит, что многоугольник R равносоставлен как с многоугольником P , так и с многоугольником Q , то-есть многоугольники R и P могут быть разрезаны на соответственно равные части и, в свою очередь, многоугольники R и Q могут быть разрезаны на соответственно равные части. Составные части первой пары многоугольников могут быть и не похожими на составные части второй пары многоугольников, и число частей у первой пары может не равняться числу частей у второй пары многоугольников.

На рис. 20, *а* для примера изображён многоугольник R , разрезанный на такие части, из которых составляется (не изображённый на рисунке) многоугольник P (в соответствии с этим части обозначены через P_1 , P_2 , P_3 и P_4).

На рис. 20, *б* — тот же многоугольник R , но разрезанный, допустим, на такие части, из которых составляется

(не изображённый на рисунке) многоугольник Q (в соответствии с этим части обозначены через Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4).

Выполним теперь на многоугольнике R и те и другие разрезы (рис. 20, в). Получается некоторое количество более мелких частей, и нетрудно видеть, что, группируя все эти части одним способом, можно сложить каждую из частей P_1, P_2, P_3, P_4 многоугольника P (например, части 1 и 2 в сумме составляют часть P_1 , части 3, 4 и 5 в сумме составляют часть P_2 и т. д.), а значит, и весь многоугольник P . Группируя же их другим способом, можно сложить каждую из частей Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 многоугольника (например, части 5 и 8 в сумме составляют Q_1 , части 2, 4 и 7 составляют Q_2 и т. д.), а значит, и весь многоугольник Q .

Таким образом, из одних и тех же частей многоугольника R (только по-разному сгруппированных) может быть составлен как многоугольник P , так и многоугольник Q ; следовательно, по определению, эти многоугольники равносоставлены, то-есть многоугольник P может быть превращён в многоугольник Q .

Из лемм 2, 3 и 4 следует

Лемма 5. Всякий треугольник можно превратить в равновеликий ему квадрат.

Остаётся рассмотреть последнюю лемму.

Лемма 6. Каждые два квадрата можно превратить в один.

Из школьного курса геометрии известно, что квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах того же треугольника (теорема Пифагора). Докажем теперь, что квадрат, построенный на гипотенузе, не только равновелик, но и равносоставлен с суммой квадратов, построенных на катетах.

Доказательств существует очень много. Рассмотрим одно из них (рис. 21).

Для превращения квадратов $BFGC$ и $ACKL$, построенных на катетах треугольника ABC , в квадрат $AEDB$, построенный на гипотенузе, делаем следующие разрезы: 1) разрез AM , как продолжение стороны AE ; 2) разрез $FN \parallel AB$; 3) разрез $NP \parallel AE$; 4) разрез $DY \parallel BC$; 5) разрез $ES \perp DY$; 6) разрез BR как продолжение стороны FB . 7) Отложим $DQ = NP$ и сделаем разрез $QT \perp DY$.

Имеем: $FN=AB$, как отрезки параллельных между параллельными; но $AB=BD$, следовательно, $FN=BD$;

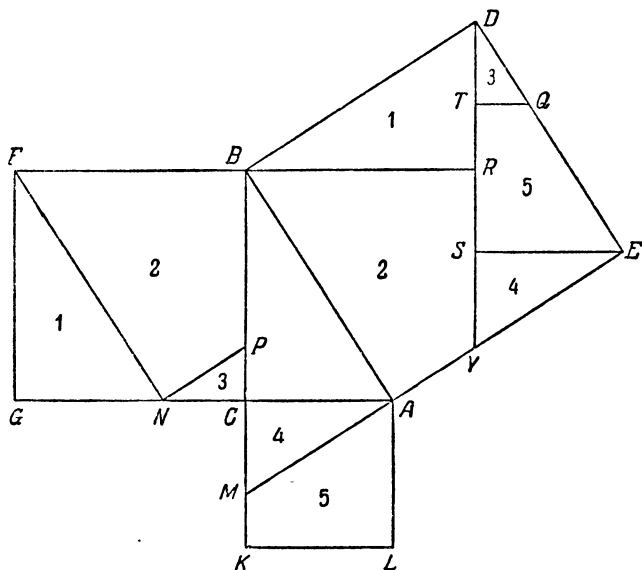


Рис. 21.

кроме того, $\angle NFG = \angle DBR$ (взаимная перпендикулярность сторон).

Отсюда

$$\triangle FGN = \triangle BRD$$

и

$$FG = BR = FB.$$

В силу равенства двух пар сторон фигур 2 и равенства всех углов они при наложении совпадут всеми своими частями.

Из равенства треугольников ABC и EDS ($AB=DE$ и углы равны) имеем $ES=AC$ и так как ещё $\angle SEY = \angle CAM$, то $\triangle ESY = \triangle CAM$.

Отсюда $EY=AM$.

Так как $AY=NP=DQ$ и $AE=DE$, то $EQ=EY=AM$.

Сравнивая теперь фигуры 5, мы опять имеем равенство всех углов и двух пар сторон ($ES=AC=AL$ и $EQ=AM$); следовательно, при наложении фигуры 5 совпадают.

Все равные части на рис. 21 отмечены одинаковыми цифрами.

Другое из возможных доказательств этой леммы послужило нам материалом для головоломки **15** на стр. 19.

Теперь ясно, что любые два квадрата можно превратить в один. Для этого нужно приложить их вершина к вершине так, чтобы стороны одного служили продолжением сторон другого, соединить отрезком свободные вершины,— и задача сводится к только что решённой. Между прочим, используя рис. 21, вы сможете изготовить ещё одно «наглядное пособие» для иллюстрации теоремы Пифагора.

Из совокупности рассмотренных лемм:

во-первых, вытекает справедливость высказанной выше принципиальной теоремы, устанавливающей возможность превращения многоугольника в квадрат (следовательно, и обратно):

всякий многоугольник можно превратить в равновеликий ему квадрат;

во-вторых, получается и способ (или, как говорят математики, — «алгоритм») такого превращения.

*Два замечания:

1. Если, решая задачу на превращение каждого данного многоугольника в квадрат, мы будем придерживаться указанной цепочки превращений, то, вообще говоря, можем получить много лишних разрезов. Поэтому в каждой конкретной задаче подобного рода следует пытаться найти пути, сокращающие число необходимых разрезов.

2. Превратить многоугольник в квадрат можно и иными путями. Нетрудно будет, например, наметить ещё один возможный порядок такого рода превращений, если предварительно доказать следующую теорему:

Всякий прямоугольник можно превратить в другой, ему равновеликий, и притом такой, что одна его сторона имеет данную длину.

Для доказательства рассмотрим сначала тот случай, когда данная сторона нового прямоугольника больше меньшей стороны данного прямоугольника $ABCD$, но меньше его диагонали (рис. 22).

На продолжении стороны CD найдём такую точку E , чтобы отрезок AE равнялся данной стороне искомого

прямоугольника. Из вершины B проведём прямую, параллельную AE , и опустим на неё перпендикуляры AF и EK из точек A и E . Точки пересечения CD с BK и AF обозначим соответственно буквами L и N .

Отложим последовательно отрезок EN на стороне AB от точки A n раз, где n — такое число, что $n \cdot EN \leq AB$,

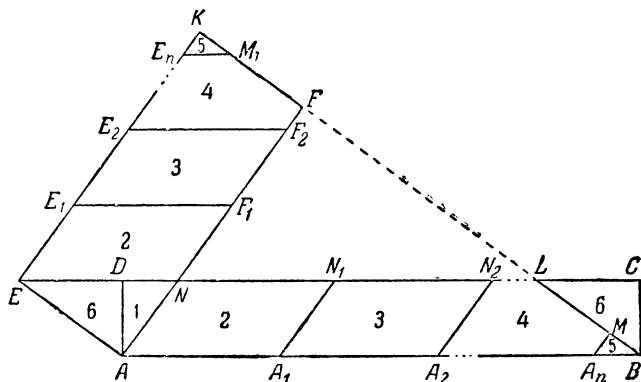


Рис. 22.

но если отложить отрезок EN на стороне AB ещё один раз, то будем иметь:

$$(n+1) \cdot EN > AB^*).$$

Из точек деления A_1, A_2, \dots, A_{n-1} проведём прямые, параллельные AF , до пересечения с LD в точках N_1, N_2, \dots . Последняя прямая, проведённая из A_n параллельно AF , пересечёт BL в точке M^{**}).

Таким же образом отложим последовательно отрезок AN на стороне EK и из точек деления E_1, E_2, \dots проведём прямые, параллельные EN , до пересечения с AF в точках F_1, F_2, \dots . Последняя из них пересечёт сторону KF в точке M_1 . Из чертежа видно, что точек $E_1,$

*) Выполнимость этих требований кладётся в основу теории измерения отрезков и формулируется в виде следующей аксиомы: «каковы бы ни были два данных неравных отрезка AB и CD (пусть $AB > CD$), всегда найдётся такое натуральное число n , что $n \cdot CD \leq AB < (n+1) \cdot CD$ » (аксиома Архимеда).

**) Если окажется, что $n \cdot CD = AB$, то точка A_n (а вместе с нею и точка M) совпадёт с B .

E_2, \dots будет столько же, сколько было точек A_1, A_2, \dots , а именно, n .

Из построения сразу следует равенство частей, обозначенных на рис. 22 одинаковыми цифрами, а часть 1 — общая для данного и искомого прямоугольников. Таким образом, прямоугольники $ABCD$ и $AFKE$ равносторонены.

Рассмотрим теперь тот случай, когда данная сторона искомого прямоугольника больше диагонали данного прямоугольника.

Положим, что $AFKE$ — данный прямоугольник (тот же рис. 22). Продолжим KF до такой точки B , чтобы отрезок AB равнялся данной стороне искомого прямоугольника. Проведём $EC \parallel AB$, $AD \perp EC$ и $BC \perp EC$. На сторонах EK и AF от точек E и A опять последовательно отложим отрезки, равные AN , и построим E_1F_1 , E_2F_2 и т. д. Аналогичным построением находим соответственно равные части и в прямоугольнике $ABCD$.

Наконец, пусть данная сторона AD искомого прямоугольника меньше каждой стороны данного прямоугольника $AFKE$ (тот же рис. 22).

Достаточно провести прямую EC из вершины E на расстоянии от вершины A , равном AD . Дальнейшие построения аналогичны предыдущим.

Следствие. *Всякий прямоугольник можно превратить в квадрат.*

Теперь мы можем осуществить такую последовательность превращений многоугольника в квадрат: расчленим

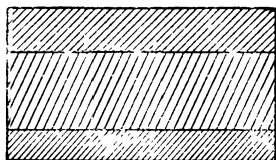


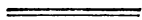
Рис. 23.

многоугольник на треугольники, каждый треугольник одним сечением превратим в параллелограм и каждый параллелограм — в прямоугольник. Полученные прямоугольники, вообще говоря, не будут иметь одинаковых оснований. Пользуясь доказанной теоремой, превратим все их в прямоугольники с равными основаниями; при-

кладывая теперь друг к другу получившиеся прямоугольники равными сторонами, получим один прямоугольник, например, как на рис. 23, который и превращаем в квадрат.

Таким образом, какой-либо многоугольник, а следовательно, и все равновеликие ему многоугольники равносоставлены с некоторым квадратом, имеющим определённую сторону a . Значит, каждый квадрат является «представителем» некоторого класса равновеликих многоугольников.

Что касается криволинейных фигур, то далеко не каждая из них превратима в квадрат переложением её частей. С этим фактом и связано отличие в приёмах измерения площадей прямолинейных и криволинейных фигур.



ПРЕВРАЩЕНИЕ КВАДРАТА В 2, 3, ..., n РАВНОСТОРОННИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В заключение этой главы рассмотрим возможность превращения квадрата в любое, заранее намеченное число равных равносторонних треугольников.

Заметим предварительно, что из n равных равносторонних треугольников при n чётном можно составить такой параллелограмм, высота которого равна высоте h треугольника, а бо́льшая сторона равна $x \cdot \frac{n}{2}$, где x — сторона треугольника (рис. 24); при n нечётном

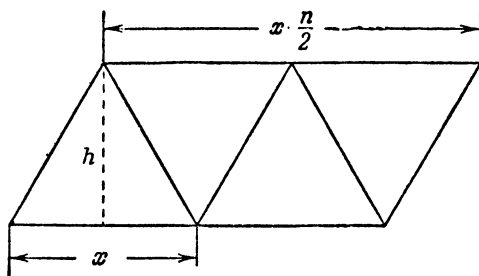


Рис. 24.

можно составить равнобокую трапецию с высотой h и с бо́льшим основанием, равным $x \cdot \frac{n+1}{2}$ (рис. 25), причём эта трапеция одним сечением по средней линии крайнего треугольника (на рис. 25 — штриховая линия) превращает-

ся в параллелограм с высотой h и основанием опять-таки равным $x \cdot \frac{n}{2}$.

Теперь ход решения ясен. Мы знаем способ превращать параллелограм в квадрат. Используем этот способ для превращения квадрата в параллелограм подходящих

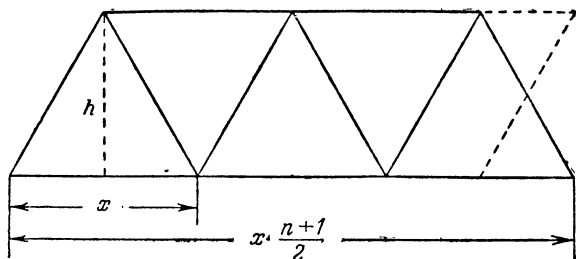


Рис. 25.

размеров, а затем полученный параллелограм разрежем на равносторонние треугольники, например, как на рисунках 24 и 25.

Пусть сторона данного квадрата равна r , сторона каждого искомого треугольника — x и высота — h . Если число треугольников n , то нам нужно получить из квадрата параллелограм со стороной $a = x \cdot \frac{n}{2}$ и площадью $ah = r^2$. Так как $h = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$x \cdot \frac{n}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r^2 \quad \text{или} \quad x^2 = \frac{4r^2}{n\sqrt{3}},$$

откуда

$$x = \frac{2r}{\sqrt{n\sqrt{3}}}$$

и

$$a = \frac{2r}{\sqrt{n\sqrt{3}}} \cdot \frac{n}{2} = r \sqrt{\frac{n}{\sqrt{3}}}.$$

Для удобства построения отрезка a по известным r и n придадим этой формуле следующий вид:

$$a = \sqrt{\frac{r^2 n}{\sqrt{3}}} = \sqrt{rn \sqrt{\frac{r^2}{3}}} = \sqrt{rn \sqrt{r \frac{r}{3}}}.$$

Отсюда видно, что надо сначала построить отрезок, средний пропорциональный к отрезкам r и $\frac{r}{3}$, а затем — средний пропорциональный к полученному отрезку и отрезку rn .

Проведём эти построения для $n=4$ и $n=5$, то-есть покажем, как разбить квадрат $ABCD$ на 4 и на 5 равных равносторонних треугольников (рис. 26 и 27).

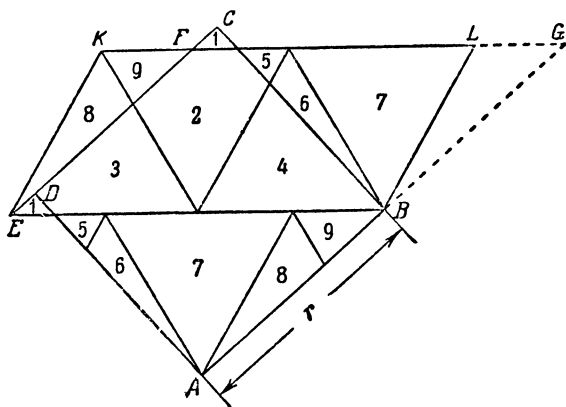


Рис. 26.

На стороне CD или на её продолжении найдём точку E такую, чтобы

$$BE = a = r \sqrt{\frac{n}{\sqrt{3}}}.$$

Это возможно при условии, что $a > r$, или $\sqrt{\frac{n}{\sqrt{3}}} > 1$, откуда $n > \sqrt{3}$, то-есть наше построение осуществимо для любого числа треугольников, начиная с двух. А случай превращения квадрата в один треугольник рассмот-

ников потребуется ещё перемещение треугольника MNL в положение BPN (рис. 27).

Разметить на квадрате такие же части, из каких состояются треугольники — дело несложное. Так получаются 9 частей квадрата на рис. 26, из которых складываются 4 равносторонних треугольника, и 11 частей на рис. 27, из которых складываются 5 равносторонних треугольников.

Теперь читатель легко выполнит построение для нашей головоломки **20** на стр. 23 и может сам приготовить множество аналогичных головоломок для своих друзей.



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЛАВЫ II

I. Задачу о делении квадрата на 5 квадратов можно, очевидно, решить теми же приёмами, какими была решена задача о делении квадрата на три квадрата (стр. 39—46). Вспомните, что из двух способов, которыми мы решали задачу о превращении квадрата в три квадрата, меньшее число

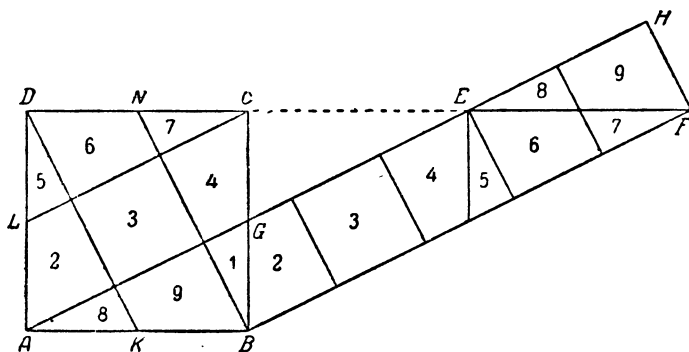


Рис. 28.

частей дал второй способ. Любопытно, что, применяя те же приёмы к решению данной задачи, мы получим иную картину. Второй способ потребует разрезывания квадрата на 10 частей (убедитесь в этом!), а первый — только на 9 частей.

Применяя первый способ, мы должны найти на продолжении стороны DC данного квадрата $ABCD$ (рис. 28) точку, отстоящую от вершины A на расстоянии $\sqrt{5}$, если принять сторону квадрата за 1. Для этого достаточно отложить

отрезок $DE = 2DC = 2$. Тогда

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Дальнейшие построения и доказательства аналогичны приведённым на стр. 39—43. Выполняя соответствующие построения (рис. 28) и производя несложные расчёты, заключаем, что для превращения квадрата $ABCD$ в 5 равных квадратов достаточно сделать 4 прямолинейных разреза: AG , CL , DK и BN , где $AG \parallel CL$ и $DK \parallel BN$, а точки K , G , N и L являются серединами сторон данного квадрата. Получающиеся при этом 9 частей представляют собой 4 равные трапеции (части 2, 4, 6, 9), 4 равных прямоугольных треугольника (части 1, 5, 7, 8) и один квадрат 3, составляющий $\frac{1}{5}$ часть данного квадрата. Если этот квадрат 3 тоже

разрезать на такие же треугольник и трапецию, то получится наша головоломка **14** на стр. 18: из 5 равных трапеций и 5 равных треугольников составить один квадрат или 5 равных квадратов.

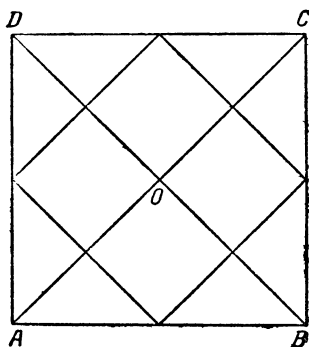


Рис. 29.

2. Несложная задача. Разрезая данный квадрат (рис. 29) по диагоналям AC и BD , получим четыре равных прямоугольных треугольника AOB , BOC , COD и DOA , из которых можно составить два квадрата. В свою очередь каждый из полученных квадратов без труда разрезается на 4 равных квадрата. Всё решение легко усматривается из чертежа.

3. В этой задаче идёт речь, в сущности говоря, о превращении данного прямоугольника в квадрат. Можно было бы подумать об общем методе решения такой задачи и, владея общим методом, применить его к данной частной задаче, то-есть идти от общего к частному. Но не менее употребителен (и очень важен) также и противоположный ход мысли: от частного к общему, от наблюдений к обобщениям, от догадки, блеснувшей при решении частной задачи, к методу, позволяющему решать целый ряд аналогичных задач.

Одно из возможных превращений данного прямоугольника в квадрат делением его на 4 части приведено на рис. 30.

Сторона искомого квадрата должна быть равна $\sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$. Геометрически найти отрезок длиной $\sqrt{10}$ трудно. Это — гипотенуза прямоугольного треугольника,

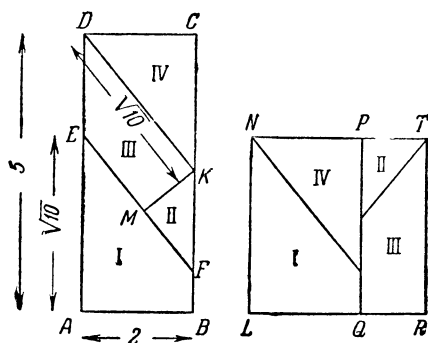


Рис. 30.

катеты которого равны 1 и 3. На стороне AD отложим $AE = \sqrt{10}$ и на стороне BC найдём точку K такую, что $DK = \sqrt{10}$. Затем отложим $KF = DE$ и соединим отрезком точки E и F . Фигура $EFKD$ — параллелограм (DE и KF равны и параллельны); следовательно, $EF = DK = \sqrt{10}$ и $EF \parallel DK$; $\angle AEF = \angle ADK$, но $\angle ADK + \angle KDC = 90^\circ$; следовательно, $\angle AEF + \angle KDC = 90^\circ$. Значит, если сложить трапецию $AEFB$ и треугольник DCK по линиям EF и DK , то получим прямоугольник $LN PQ$ со сторонами $LN = AE = \sqrt{10}$ и $LQ = 2$.

Из тех же соображений следует, что, прикладывая треугольник FMK стороной FK к стороне ED трапеции $EMKD$, мы получим прямоугольник $QRTP$, одна сторона которого $RT = KD = \sqrt{10}$.

Вычислим длину другой стороны $QR = MK$. Прямоугольные треугольники FMK и KCD подобны ($\angle MFK = \angle CKD$).

Отсюда $\frac{MK}{KF} = \frac{DC}{DK}$. Кроме того, $KF = DE = 5 - \sqrt{10}$;

$$MK = \frac{KF \cdot DC}{DK} = \frac{(5 - \sqrt{10}) \cdot 2}{\sqrt{10}} = \frac{(5 - \sqrt{10}) \sqrt{10}}{5} = \sqrt{10} - 2.$$

Итак, $QR = MK = \sqrt{10} - 2$ и $RT = \sqrt{10}$.

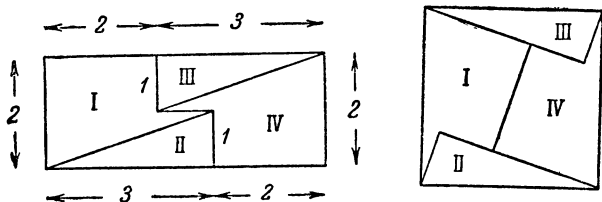


Рис. 31.

Прикладывая друг к другу прямоугольники $LNPQ$ и $QPTR$ сторонами QP , получим квадрат, так как

$$\begin{aligned} LR &= LQ + QR = \\ &= 2 + (\sqrt{10} - 2) = \\ &= \sqrt{10} = RT. \end{aligned}$$

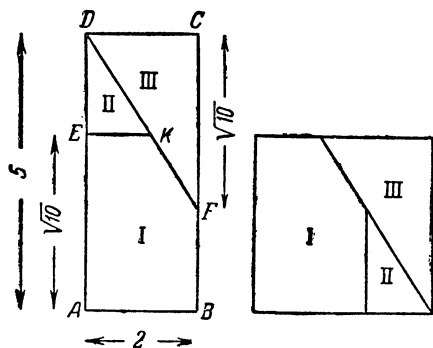


Рис. 32.

Второе решение той же задачи ясно из рис. 31.

В обоих случаях прямоугольник разрезался на 4 части. Но количество необходимых делений прямоугольника можно снизить и до трёх, причём опять-таки не единственным способом. Одно из возможных решений

задачи осуществлено на рис. 32, а читателю, несомненно, будет приятно самому додуматься до иных решений этой задачи.

Построение линий разреза здесь очень простое. На сторонах AD и BC данного прямоугольника откладываем $AE = CF = \sqrt{10}$ и производим разрезы по прямым линиям DF и $EK \parallel AB$, где K — точка пересечения отрезков EK и DF .

Имеем далее: $DE = FB$ и $\angle EDK = \angle DFC$; следовательно, приложив друг к другу треугольник EDK и фигуру $AЕКFB$ сторонами DE и FB , мы получим трапецию, которой до полного квадрата как раз и нехватает прямоугольного треугольника DCF .

Подумайте теперь, при каком соотношении между сторонами прямоугольника можно осуществить превращение его в квадрат изложенным здесь способом и как обобщить этот способ на любой прямоугольник? (См. решение задачи 6.)

4. Пусть $AB = 9$, а $BD = 16$ единицам масштаба (рис. 33). Площадь прямоугольника $ABDC$ равна $16 \times 9 = 144$ квадратным единицам. Такова же и площадь искомого квадрата.

Сторона квадрата, следовательно, должна иметь длину, равную $\sqrt{144} = 12$ единицам, то-есть должна быть на 3 единицы длин-

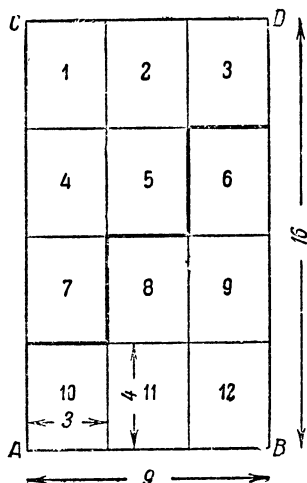


Рис. 33.

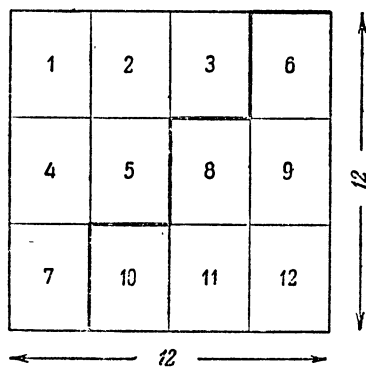


Рис. 34.

нее меньшей стороны прямоугольника и на 4 единицы короче большей его стороны.

Разделим AB на 3, а BD на 4 равные части и прямыми, параллельными сторонам прямоугольника, проведёнными через точки деления сторон, разобьём данный прямоугольник на 4 ряда одинаковых прямоугольников размерами 3×4 по 3 прямоугольника в каждом ряду. Для составления квадрата достаточно теперь перераспределить образовавшиеся 12 прямоугольников в 3 ряда по 4 прямоугольника в каждом ряду. Нужно догадаться сделать для этого один ступенчатый разрез (рис. 33 и 34).

5. Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 35), длины сторон которого $AB=a$ и $BC=b$ — целые числа. Пусть $b > a$.

Для превращения данного прямоугольника в квадрат способом ступенчатого разреза надо разделить меньшую сторону прямоугольника на n равных частей, а большую — на $n+1$ часть, где n — некоторое целое число, и разбить прямоугольник на $n(n+1)$ прямоугольников размерами $\frac{a}{n} \times \frac{b}{n+1}$. Осуществив ступенчатый разрез и переложив части так, как в предыдущей задаче, мы получим новый

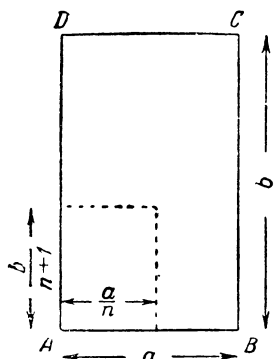


Рис. 35.

прямоугольник со сторонами $a + \frac{a}{n}$ и $b - \frac{b}{n+1}$. Этот прямоугольник будет квадратом, если

$$a + \frac{a}{n} = b - \frac{b}{n+1}.$$

Найдём из этого уравнения отношение $\frac{b}{a}$:

$$(an + a)(n + 1) = bn^2,$$

$$a(n + 1)^2 = bn^2,$$

$$\frac{b}{a} = \frac{(n + 1)^2}{n^2}.$$

Итак, превращение прямоугольника в квадрат при помощи деления его на две части одним ступенчатым разрезом возможно только в том случае, когда отношение длины большей стороны прямоугольника к длине меньшей его стороны равно отношению чисел $(n+1)^2$ и n^2 , где $n=2, 3, 4 \dots$

При $n=2$ это будет прямоугольник с отношением сторон

$$\frac{b}{a} = \frac{9}{4},$$

при $n=3$ отношение $\frac{b}{a}$ равно $\frac{16}{9}$ (как в предыдущей задаче),

при $n=4$ отношение $\frac{b}{a}$ равно $\frac{25}{16}$ и т. д.

6. Применим тот способ решения, который был использован для составления квадрата из трёх частей прямоугольника 5×2 (решение задачи **3** на стр. 78—80). Применительно к прямоугольнику со сторонами a и b (рис. 36) этот простой и удобный способ будет заключаться в том, что мы на больших сторонах прямоугольника откладываем отрезки, равные стороне квадрата, равновеликого данному прямоугольнику,

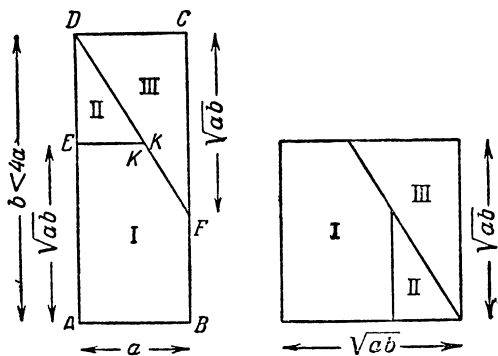


Рис. 36.

то-есть отрезки $AE = CF = \sqrt{ab}$ (среднее пропорциональное к a и b ; построение такого отрезка известно); проводим отрезки DF и $EK \parallel AB$ и без труда составляем квадрат из образовавшихся трёх частей прямоугольника. Такой приём осуществим, разумеется, только в том случае, когда EK действительно пересекается с отрезком DF , а для этого необходимо, чтобы отрезок $AE = \sqrt{ab}$ был не меньше половины стороны $AD = b$.

Решаем неравенство

$$\frac{b}{2} \leq \sqrt{ab}$$

относительно b :

$$\frac{b^2}{4} \leq ab,$$

откуда

$$b \leq 4a.$$

Впрочем, если $b = 4a$ (рис. 37), то

$$AE = CF = \sqrt{ab} = 2a = 2AB$$

и EF параллелен и равен AB . Разрезать прямоугольник по DF в этом случае не надо. Достаточно приложить прямоугольник $DEFC$ к прямоугольнику $AEFB$ — и получится квадрат.

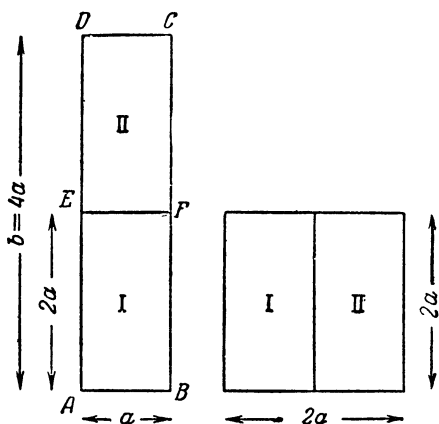


Рис. 37.

Пусть $b > 4a$ (рис. 38, а). В таком случае как AE , так и равный ему отрезок CF меньше $\frac{b}{2}$. Теперь $EK \parallel AB$ не пересекается с отрезком DF . Поступим так: ототрежем от данного прямоугольника образовавшуюся часть $ABKE$ и на стороне ED оставшегося прямоугольника $EKCD$ вновь отложим отрезок $EL = AE = \sqrt{ab}$, а на стороне CK — отрезок $CF = \sqrt{ab}$ и проведём $LM \parallel AB$. Допустим, что LM пересекает DF в точке M . Легко понять, что из частей II, III и IV составляется прямоугольник LEF_1C_1 (рис. 38, б), одна сторона которого $LE = \sqrt{ab}$, а другая $LC_1 = LM + DC = LM + a$.

Прикладывая этот прямоугольник к отрезанному прямоугольнику $ABKE$, получим фигуру EAF_1C_1 (рис. 38, в). Для доказательства того, что EAF_1C_1 — квадрат, вычислим стороны EA и EC_1 .

$EA = \sqrt{ab}$ по построению, а $EC_1 = EK + KC_1$ или

$$EC_1 = EK + LC_1 = a + LM + a = LM + 2a. \quad (1)$$

Вычислим LM . Для этого продолжим LM (рис. 38, а) до

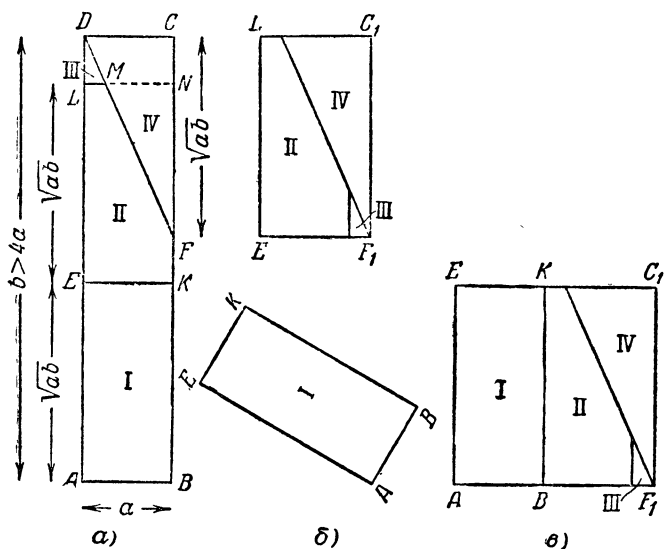


Рис. 38.

пересечения с EC в точке N и найдём LM из подобия треугольников MNF и MLD :

$$\frac{MN}{LM} = \frac{FN}{DL},$$

где

$$DL = b - 2AE = b - 2\sqrt{ab},$$

но

$$FN = FC - NC = FC - DL = \sqrt{ab} - DL;$$

значит,

$$\frac{MN}{LM} = \frac{\sqrt{ab} - DL}{DL}$$

или по свойству пропорции:

$$\frac{MN + LM}{LM} = \frac{\sqrt{ab} - DL + DL}{DL};$$

$$\frac{a}{LM} = \frac{\sqrt{ab}}{b - 2\sqrt{ab}};$$

$$LM = \frac{a(b - 2\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}}.$$

Подставляя это выражение в (1), получим:

$$\begin{aligned} EC_1 &= \frac{a(b - 2\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}} + 2a = \frac{a(b - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}} = \\ &= \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Следовательно, $EC_1 = EA$ и прямоугольник EAF_1C_1 есть действительно квадрат.

Если же бо́льшая сторона прямоугольника $ABCD$ окажется настолько длиннее меньшей, что и после вторичного откладывания отрезка $EL = AE$ отрезок $LM \parallel AB$ не пересечёт DF , то надо повторить это откладывание столько раз, сколько потребуется, чтобы остающийся отрезок стороны AD оказался меньше \sqrt{ab} , то-есть меньше стороны искомого квадрата. После каждого откладывания отрезка длиной \sqrt{ab} надо отсекал соответствующий прямоугольник.

Нетрудно понять, что, прикладывая все отсечённые прямоугольники к последнему, составленному из частей вида II, III и IV, мы получим искомый квадрат. Вот это и есть один из способов превращения произвольного прямоугольника в квадрат.

Известны и другие способы; с некоторыми из них мы ещё познакомим читателя в дальнейшем, а пока рекомендуем поискать свои приёмы решения этой задачи и сопоставить их с изложенным здесь способом.

7. Пусть ABC — какой-нибудь прямоугольный треугольник (рис. 39). Разрезав его по средней линии $ED \parallel CA$ и переложив треугольник BED в положение AFD , мы получим прямоугольник.

Для доказательства построим на AC и EC , как на сторонах, прямоугольник $AFEC$ и покажем, что $\triangle AFD = \triangle BED$.

Действительно, это следует из того, что $AF = EC = BE$ по построению, $\angle FAD = \angle DBE$, как внутренние накрест лежащие при параллельных AF и BE и секущей AB , и углы F и E — прямые.

Каким бы ни был прямоугольник $AFEC$, он может быть превращён в квадрат, хотя бы, например, приёмом задачи 6.

8. Пусть ABC — такой прямоугольный треугольник, в котором $\frac{BC}{AC} < 2$ (рис. 40).

Построим среднюю линию ED треугольника и найдём на ней точку F такую, чтобы отрезок CF , соединяющий эту точку с вершиной C прямого угла, равнялся стороне искомого квадрата, равновеликого данному треугольнику.

Покажем, что такое построение возможно.

Если отрезок CF равен стороне искомого квадрата, то $CF^2 = \frac{AC \cdot BC}{2}$. Из прямоугольного треугольника CEF имеем:

$$EF^2 = CF^2 - CE^2 = \frac{AC \cdot BC}{2} - \frac{BC^2}{4};$$

$$EF = \sqrt{\frac{BC}{2} \left(AC - \frac{BC}{2} \right)}. \quad (1)$$

Чтобы установить, что $EF < ED$, запишем очевидное неравенство

$$(BC - AC)^2 > 0.$$

$$\text{Отсюда } BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC > 0$$

или

$$\frac{AC \cdot BC}{2} - \frac{BC^2}{4} < \frac{AC^2}{4}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) имеем:

$$EF^2 < \frac{AC^2}{4}.$$

Отсюда $EF < \frac{AC}{2}$, а так как $ED = \frac{AC}{2}$, то $EF < ED$.

Из вершины A опустим перпендикуляр AH на CF и построим на AH квадрат $AHKL$. Он будет равновелик треугольнику ABC .

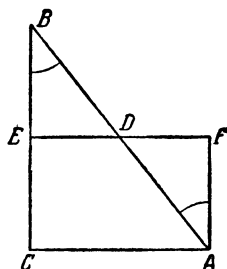


Рис. 39.

В самом деле, из подобия треугольников AHC и CEF имеем:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{CE}{CF},$$

а так как $CF = \sqrt{\frac{AC \cdot BC}{2}}$ и $CE = \frac{BC}{2}$, то из предыдущей пропорции имеем:

$$AH = \frac{AC \cdot CE}{CF} = \frac{AC \cdot BC}{2} : \sqrt{\frac{AC \cdot BC}{2}} = \sqrt{\frac{AB \cdot BC}{2}},$$

что и доказывает равновеликость треугольника ABC и квадрата $AHKL$.

Отрезки ED , CF и AH разделят данный треугольник ABC на такие четыре части, которые и в квадрате нетрудно найти следующим построением: опускаем перпендикуляр LM на AC и проводим $LN \parallel AB$.

Соответственно равные части обозначены одинаковыми цифрами. Равенство частей читатель легко установит сам.

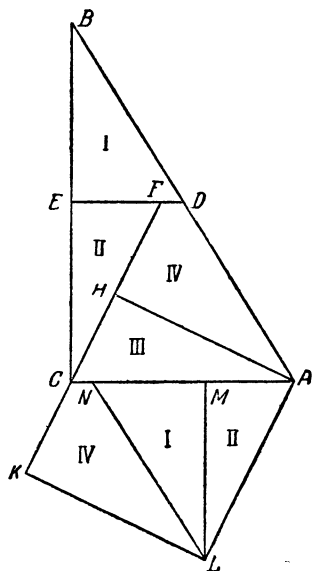


Рис. 40.

Если, в частности, $\frac{BC}{AC} = 1$,

то-есть $BC = AC$ (треугольник — прямоугольный и равнобедренный),

то по формуле (1) $EF = \frac{AC}{2} = ED$,

точка F совпадает с D , AH совпадает с AD , сечение ED оказывается лишним, и треугольник ABC достаточно разрезать один раз по линии CD , чтобы превратить его в квадрат. Это очевидно и без вычислений: стоит только разрезать прямоугольный равнобедренный треугольник по его высоте, как из полученных

двух частей легко составляется квадрат.

9. Пусть $AHKL$ (тот же рис. 40) — данный квадрат. Требуется превратить его в такой прямоугольный треугольник, в котором отношение n большего катета к меньшему

дано, причём

$$1 < n < 2.$$

Тогда из уравнений

$$\frac{BC}{AC} = n \text{ и } \frac{AC \cdot BC}{2} = AH^2$$

определяем $AC = AH \sqrt{\frac{2}{n}}$, или $AC = \sqrt{AH \cdot \frac{2AH}{n}}$.

Последняя формула даёт возможность построить отрезок AC как средний пропорциональный к отрезкам AH и $\frac{2AH}{n}$.

Откладываем AC так, чтобы точка C оказалась на стороне KH данного квадрата; проводим $LM \perp AC$. Прямоугольный треугольник ABC с катетами AC и $BC = 2LM$ и будет искомым.

В самом деле, из подобия треугольников AHC и AML имеем:

$$\frac{LM}{AL} = \frac{AH}{AC};$$

но $AH = AL$ и $LM = \frac{BC}{2}$ по условию; следовательно,

$$AH^2 = \frac{AC \cdot BC}{2},$$

откуда видно, что треугольник ABC равновелик данному квадрату.

Проведя $LN \parallel AB$, мы расчленим квадрат на четыре части I, II, III, IV, перекладывая которые можно составить прямоугольный треугольник ABC .

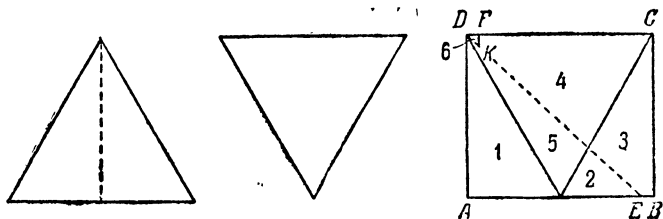


Рис. 41.

10. На больших сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ (рис. 41), образовавшегося при сложении двух данных равных равносторонних треугольников, откладываем отрезки AE

и CF , равные стороне искомого квадрата, которую следует предварительно построить, как среднюю пропорциональную к стороне и высоте прямоугольника (или, что то же самое, — треугольника). Линиями разреза будут DE и $FK \perp CD$ (см. решение задачи 3 на стр. 78—80).

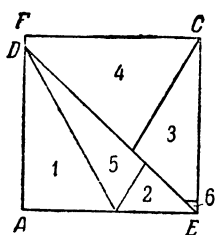


Рис. 42.

Передвинем фигуру $BCFKE$ вверх и влево вдоль линии DE , затем переложим треугольник DFK из верхнего угла в нижний, — и квадрат готов (рис. 42).

Каждый треугольник при этом разрезается на 3 части.

Подумайте, почему получающийся здесь прямоугольник $ABCD$ не может быть превращён в квадрат при помощи только одного разреза по способу задачи 4?

Второй способ показан на рис. 43. Из данных треугольников ABC и BCD составляем параллелограмм $ABDC$, который затем превращаем в параллелограмм $ABEF$, где AF — средняя пропорциональная к стороне AB и соответствующей ей высоте параллелограмма $ABDC$ (см. стр. 72—76). Опускаем на AF перпендикуляр BK и достраиваем искомый квадрат $BKLM$.

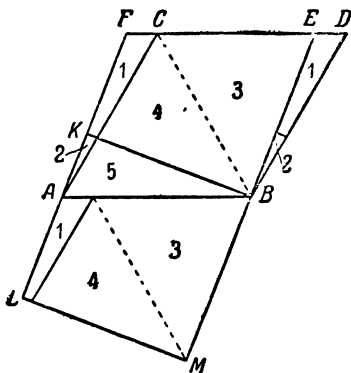


Рис. 43.

Соответственно равные части на рис. 43 отмечены одинаковыми цифрами.

II. Различными способами можно превратить квадрат в такие два квадрата, из которых площадь одного вдвое больше площади другого. Например, мы умеем превращать квадрат в прямоугольник с отношением сторон 3:1 (стр. 39—46). Можно выполнить такое превращение и отрезать квадрат со стороны, равной меньшей стороне получившегося прямоугольника. Так образуется один из искомых квадратов. Оставшийся прямоугольник будет иметь площадь, вдвое большую площади отрезанного квадрата, а превратить его полностью в квадрат мы теперь тоже умеем.

Но при таком способе решения наверное получится много частей. Мы дадим другое, очень экономное решение, при котором квадрат разрезается только на 5 частей.

Произведём предварительно некоторые расчёты. Пусть сторона данного квадрата равна a , сторона меньшего из двух искомых квадратов — x , а большего — y . Так как площадь искомого большего квадрата вдвое больше площади меньшего квадрата, то сторона большего квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше стороны меньшего, то-есть $y = \sqrt{2} \cdot x$. По условию

$$x^2 + (\sqrt{2} \cdot x)^2 = a^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$y = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

или

$$x = \sqrt{a \cdot \frac{a}{3}},$$

$$y = \sqrt{a \cdot \frac{2a}{3}}.$$

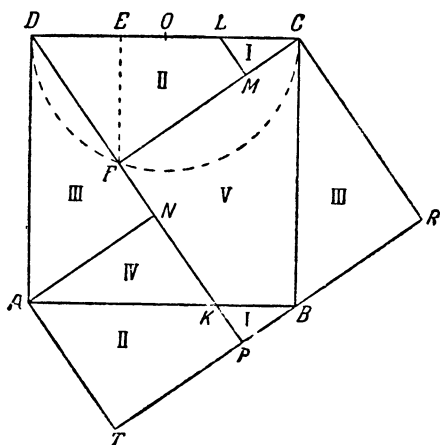


Рис. 44.

Это значит, что отрезок x есть средний пропорциональный к отрезкам a и $\frac{a}{3}$, а y — средний пропорциональный к отрезкам a и $\frac{2a}{3}$.

Оба отрезка x и y можно построить сразу, если вспомнить, что в прямоугольном треугольнике каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

На стороне DC данного квадрата $ABCD$ (рис. 44), как на диаметре, построим полуокружность внутри квадрата. Положим $DE = \frac{DC}{3} = \frac{a}{3}$.

Из точки E восставим перпендикуляр EF к стороне DC до пересечения в точке F с полуокружностью. Построим

DF и CF . На основании известной теоремы геометрии имеем:

$$DF = x = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ и } CF = y = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Продолжим DF за точку F , и точку пересечения с AB обозначим буквой K . Отложим $CL = BK$ и $LM \perp CF$. Из вершины A опустим на DK перпендикуляр AN , который будет равен отрезку DF , что следует из равенства прямоугольных треугольников AND и CFD (они имеют равные гипотенузы и углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Разрезая квадрат по линиям DK , AN , CF и LM , получим пять частей, из которых, как легко доказать, составляются два искомых квадрата $CFPR$ и $ATPN$.

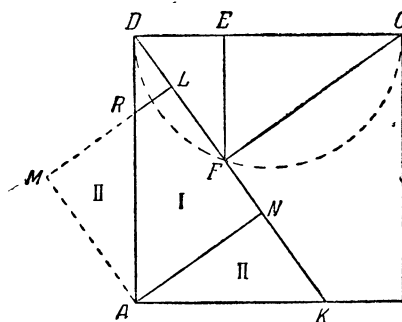


Рис. 45.

12. Пусть y — сторона среднего по величине из трёх искомых квадратов. Тогда площади искомых квадратов будут соответственно

$$\frac{2}{3}y^2; y^2 \text{ и } \frac{4}{3}y^2,$$

а сумма их

$$3y^2 = a^2,$$

где a — сторона данного квадрата $ABCD$ (рис. 45).

Имеем:

$$\text{сторона меньшего квадрата } \frac{a\sqrt{2}}{3} = x,$$

$$\text{сторона среднего квадрата } \frac{a\sqrt{3}}{3} = y,$$

$$\text{сторона большего квадрата } \frac{2a}{3} = z.$$

Отрезок y построим, как в предыдущей задаче. Это будет отрезок DF .

По построению

$$DE = \frac{a}{3} \text{ и } EC = \frac{2a}{3} = z.$$

Следовательно,

$$EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{2}}{3} = x.$$

Продолжим DF до пересечения с AB в точке K и построим $AN \perp DK$. Из равенства треугольников AND и DFC следует, что $AN = DF = y$. На AN , как на стороне, построим квадрат $ANLM$. Это — один из искомых квадратов. Его можно составить из трапеции $ANLR$ и треугольника ANK , так как $\triangle AMR = \triangle ANK$. Из равенства этих треугольников следует также, что $AK = AR$, а значит, и

$$BK=DR, \quad (1)$$

Удалив из квадрата $ABCD$ указанные части I и II , получим фигуру $KBCDRLK$, изображённую на рис. 46, a .

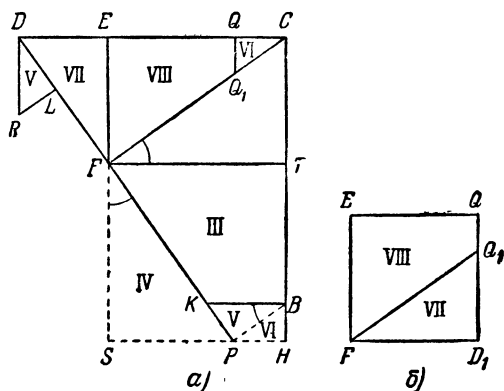


Рис. 46.

Из точки F опустим перпендикуляр FT на \overline{BC} , и на отрезке $FT=EC=z$, как на стороне, построим квадрат $FTHS$. Продолжим FK до пересечения с SH в точке P .

$\triangle FSP = \triangle FTC$, так как $FS = FT$ по построению, $\angle SFP = \angle TFC$ как дополняющие угол PFT до прямого, и углы при вершинах S и T — прямые. Отсюда

$$SP = CT = EF = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Проведём PB и докажем, что треугольник KPB — прямоугольный. Для этого вычислим PH и BH :

$$PH = SH - SP = \frac{2a}{3} - \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{3} (\sqrt{2} - 1);$$

$$\begin{aligned} BH &= HT + TC - BC = \frac{2a}{3} + \frac{a\sqrt{2}}{3} - a = \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3} (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Отношение $\frac{PH}{BH} = \sqrt{2}$. Но отношение $\frac{FT}{CT}$ тоже равно $\sqrt{2}$; следовательно, $\angle BPH = \angle CFT$ и так как $PH \parallel FT$, то и $BP \parallel CF$. Отсюда получаем, что угол BPK — прямой.

Докажем теперь равенство прямоугольных треугольников KPB и RLD . По условию (1) имеем: $BK = DR$; кроме того, $\angle KBP = \angle LDR$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Отсюда

$$\triangle KPB = \triangle RLD.$$

Для составления квадрата $SHTF$ нужен ещё треугольник BHP . Его мы отделим от треугольника CEF . Для этого отложим $CQ = HP$ и проведём $QQ_1 \perp CQ$.

Остались ещё две части данного квадрата: VII и $VIII$. Легко обосновать, что из них может быть составлен третий искомый квадрат (рис. 46, б).

Любопытно, что из этих же 8 частей квадрата можно составить два квадрата с отношением площадей 1:2 (см. головоломки **8** и **9** на стр. 13). Проверьте!

13. Разрежем данный правильный шестиугольник по диагонали FC (рис. 47, а) и, складывая образовавшиеся две трапеции по линии DC , как изображено на рисунке 47, б, составим параллелограм FEC_1B .

Построим теперь отрезок, равный стороне искомого квадрата. Он должен быть средним пропорциональным к стороне и высоте параллелограмма. Поэтому отложим на стороне BF отрезок FH , равный высоте параллелограмма, и проведём $HP \perp BF$ до пересечения в точке P с полуокружностью, которую построим на BF , как на диаметре. По известной теореме геометрии, FP будет искомым отрезком. Из F , как

из центра, радиусом, равным FP , проведём дугу, пересекающую EC_1 в точке K . Точки F и K соединим отрезком FK .

По построению FK равно стороне искомого квадрата $=\sqrt{BF \cdot KS}$, где KS — высота параллелограмма.

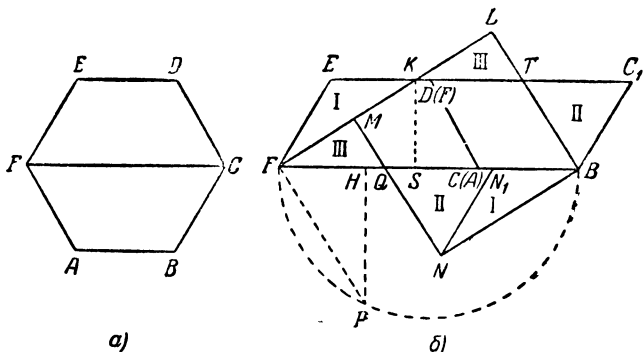


Рис. 47.

Из B опустим перпендикуляр BL на продолжение FK . Из подобия треугольников FSK и FLB имеем:

$$\frac{FK}{KS} = \frac{BF}{BL}; \quad BL = \frac{BF \cdot KS}{FK} = \frac{BF \cdot KS}{\sqrt{BF \cdot KS}} = \sqrt{BF \cdot KS},$$

откуда следует, что $BL = FK$.

Далее, построим квадрат $BLMN$ и покажем, что он состоит из тех же частей, что и параллелограмм, а значит, и данный шестиугольник.

Для доказательства проведём ещё $NN_1 \parallel FE$ до пересечения с BF в точке N_1 .

Имеем: $\triangle BNN_1 = \triangle KFE$ (равны стороны BN и FK и прилежащие к ним углы). Отсюда $NN_1 = FE = BC_1$; следовательно, $\triangle NN_1Q = \triangle BC_1T$.

Оставшиеся на противоположных сторонах параллелограмма отрезки FQ и KT , следовательно, тоже равны (по дополнению). Отсюда $\triangle FMQ = \triangle KLT$.

Равностовленность квадрата и параллелограмма, а значит, и шестиугольника, доказана. Соответственно равные части на рис. 47, б обозначены одинаковыми цифрами.

Предоставляем читателю перенести разрезы FK , MQ и BT на данный шестиугольник.

14. Заметим, что если провести диагональ CE данного правильного пятиугольника $ABCDE$ (рис. 48), то образуется равнобедренный треугольник EDC и равнобокая трапеция $ABCE$. (Докажи́те!)

На продолжении CE отложим $EF=ED(=DC=EA)$ и построим отрезок AF . При этом образуется равнобедренный

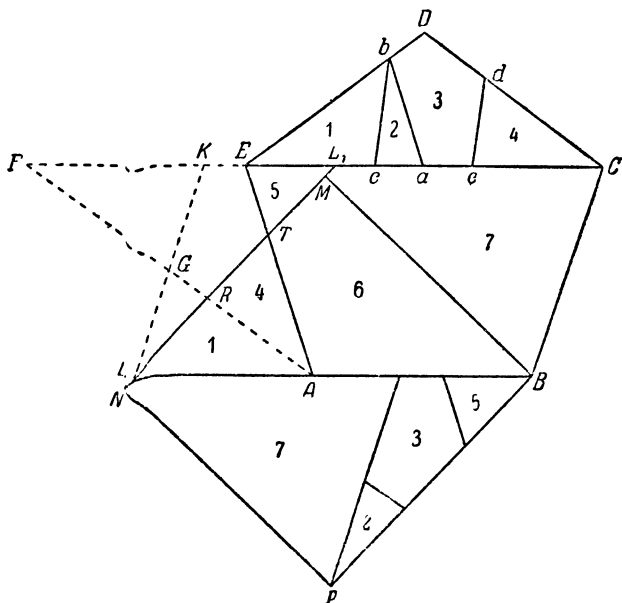


Рис. 48.

треугольник AEF с такими же боковыми сторонами, как и у треугольника EDC . Но $\angle AEF = \angle EAB$ (как накрест лежащие при параллельных AB и CF и секущей AE), следовательно, $\angle AEF = \angle EDC$.

Отсюда $\triangle AEF = \triangle EDC$.

Отрежем треугольник EDC и перенесём его в положение FEA ; получится трапеция $ABCF$, равносоставленная с данным пятиугольником. Через середину G стороны AF проведём прямую, параллельную BC до пересечения в точке K с CF и в точке L с продолжением стороны AB .

Легко понять, что $\triangle ALG = \triangle FKG$, и если отрезать треугольник KFG и переместить его в положение ALG , то

получится параллелограмм $LBCK$, равноставленный с трапецией $ABCF$, а значит, и с данным пятиугольником.

В треугольнике EDC найдём разрез, соответствующий разрезу GK . Это будет разрез ab . Теперь тем же способом, как и в предыдущей задаче, превращаем параллелограмм $LBCK$ в искомый квадрат $BMNP$.

Для этого по предыдущему найдём отрезок, средний пропорциональный к основанию и высоте параллелограмма $LBCK$, и отложим его в виде отрезка LL_1 . В треугольнике Eab найдём разрез bc , соответствующий разрезу LR , и в четырёхугольнике $CDba$ — разрез de , соответствующий разрезу RT . Эти разрезы, вместе с разрезами TL_1 , BM и EC рассекут данный пятиугольник на 7 частей. Из этих же частей и состоит квадрат $BMNP$.

15. Соединим отрезками вершины квадратов, как показано на рис. 49. Все заштрихованные прямоугольные тре-

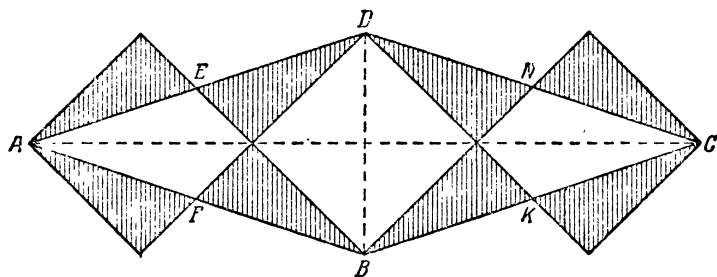


Рис. 49.

угольники равны между собой и, следовательно, могут заменить друг друга. Диагонали AC и BD получившегося четырёхугольника $ABCD$ неравны, но перпендикулярны и делятся взаимно пополам.

Следовательно, $ABCD$ — ромб, и линии разрезов цепочки взаимно параллельны:

$$AD \parallel BC \text{ и } AB \parallel DC.$$



Глава 3

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КВАДРАТА



Квадрат имеет много замечательных свойств. Некоторые из них рассматриваются в школьном курсе геометрии.

Прямые углы, равные стороны, симметричность придают квадрату простоту и известное совершенство формы; недаром он служит эталоном при измерении площадей. Эти же его качества лежат в основе и других увлекательных свойств квадрата, которые в школе не изучаются. Эти свойства интересны для каждого, кто стремится расширить рамки своих геометрических представлений.

ЧЕМ КВАДРАТ «ЛУЧШЕ» ДРУГИХ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКОВ?

Когда вы изготавливаете какой-нибудь предмет и придаёте ему ту или иную форму, то думаете не только о том, чтобы он был прочен, удобен и красив, но и заботитесь об экономии — чтобы размеры предмета (площадь, периметр, поверхность, объём и т. п.) имели наибольшее или наименьшее значение.

В этом смысле одна из возможных форм предмета может оказаться «лучше» другой.

Рассмотрим пример. Предположим, что вы изготавливаете открытую коробочку с квадратным дном (рис. 50, а) из квадратного же листа, длина стороны которого равна a см (рис. 50, б). Если для этого вы отогнёте от краёв

квадрата полоски ровно в $\frac{1}{6} a$ см, то объём коробочки будет больше, чем в том случае, если вы отогнёте полоски шириной меньше или больше чем $\frac{1}{6} a$ см. Проверьте! *).

Здесь была заранее указана форма предмета и от нас зависел только выбор его размеров.

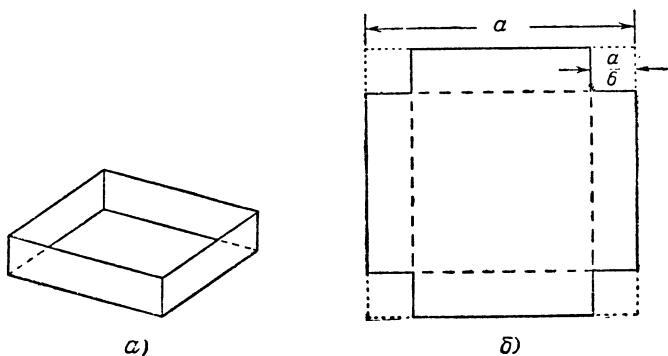


Рис. 50.

Но может возникнуть и такая практическая задача геометрического характера: огородить изгородью, забором или решёткой участок земли определённой площади так, чтобы длина ограды была насколько возможно малой, причём огороженный участок должен быть прямоугольной формы, но с любым соотношением сторон. В переводе на точный, математический язык это значит: какой из прямоугольников данной площади имеет наименьший периметр?

Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема:

Периметр квадрата меньше периметра любого равновеликого ему прямоугольника.

Для доказательства сравним периметр квадрата $ABCD$ данной площади (рис. 51) с каким-либо прямоугольником $BEFG$ той же площади. Пусть сторона квадрата равна a . Очевидно, что одна из сторон равновеликого ему пря-

*) За подробностями и геометрическим доказательством этого утверждения мы отсылаем читателя к книге Я. И. Перельмана «Занимательная геометрия».

моугольника, например b , больше a ; тогда другая сторона c непременно меньше a . Отнимем от квадрата и прямоугольника общую часть $ABEK$; останутся два равновеликих прямоугольника $AKFG$ и $KECD$, т. е. $AG \cdot FG = DC \cdot KD$. Но так как $FG < DC$, то $AG > KD$ или $b - a > a - c$. Отсюда $b + c > 2a$ и $2b + 2c > 4a$, то-есть периметр любого прямоугольника, равновеликого

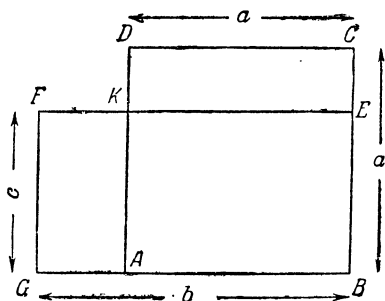


Рис. 51.

квадрату, больше периметра квадрата. Значит, среди всех равновеликих прямоугольников квадрат обладает наименьшим периметром.

Пусть теперь, наоборот, нам задана не площадь, а периметр прямоугольника. Можно построить очень много прямоугольников с одним и тем же периметром, но с раз-

ными площадями. Какой же из них будет обладать наибольшей площадью?

Это опять квадрат.

Площадь квадрата больше площади любого прямоугольника с тем же периметром.

Доказать это можно так, как обычно доказывают обратные теоремы — от противного. Дад квадрат, периметр которого равен p , а площадь равна q . Допустим, что существует прямоугольник, периметр которого тоже равен p , а площадь $Q > q$. Построим новый квадрат, равновеликий этому прямоугольнику, то-есть с площадью, тоже равной Q , и следовательно, большей, чем площадь данного квадрата. Но по предыдущей теореме периметр нового квадрата $p_1 < p$. Значит, площадь нового квадрата больше площади данного, а периметр меньше. Это невозможно. Следовательно, не существует прямоугольника с периметром таким же, как у квадрата и площадью большей, чем площадь квадрата. Не существует также и прямоугольника, имеющего площадь, равную площади данного квадрата, так как в этом случае периметр квадрата меньше периметра прямоугольника, что противоречит условию.

Итак, среди всех прямоугольников, имеющих один и тот же периметр, квадрат обладает наибольшей площадью.

Отметим ещё (без доказательства), что квадрат «лучше» не только прямоугольника, но и любого четырёхугольника, то-есть периметр квадрата меньше периметра любого четырёхугольника одинаковой с ним площади и площадь квадрата больше площади любого четырёхугольника одинакового с ним периметра.

Подобного рода свойства квадрата проявляются и в других случаях. Вот ещё пример.

Спортивная площадка ремесленного училища металлистов имела форму прямоугольника (рис. 52), по её углам росли 4 дерева. Директор училища разрешил ученикам

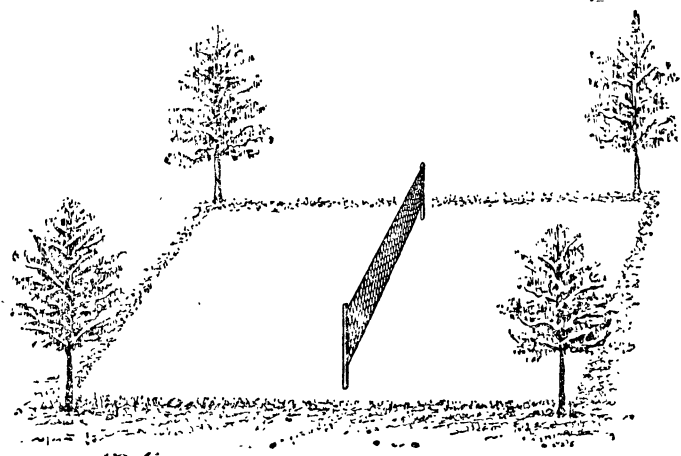


Рис. 52.

расширить площадку на столько, на сколько они смогут это сделать при выполнении следующих двух условий:

1) Сохранить прямоугольную форму площадки, но обязательно изменить направление ограничивающих её сторон.

2) Деревья должны остаться на периферии площадки (если не по углам, то где-нибудь на сторонах площадки).

Будущие мастера-металлисты засели за расчёты и чертежи.

На чертежах появились разнообразные прямоугольники, описанные около данного прямоугольника (рис. 53). Расчёты показали, что площади описанных прямоугольников не одинаковы. Какой же из них имеет наибольшую площадь?

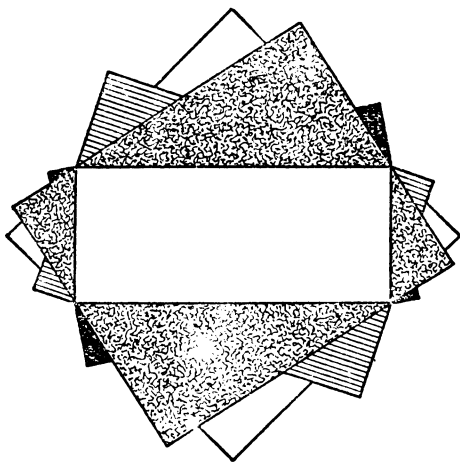
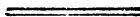


Рис. 53.

Оказалось, что таким прямоугольником является квадрат. Но это надо доказать. Директор училища не примет необоснованный проект расширения площадки.

Вот и для нашего читателя это будет задача

1. Доказать, что из всех прямоугольников, описанных около данного прямоугольника, наибольшую площадь имеет квадрат.



ПРАВИЛО КВАДРАТА В ШАХМАТАХ

Какому шахматисту не знаком тот волнующий момент игры, когда какой-нибудь пешке, предположим белой, открывается возможность последовательными ходами, без поддержки своих фигур, пройти к последней линии шахматного поля, а противодействовать этому движению может только король противника, например, как на

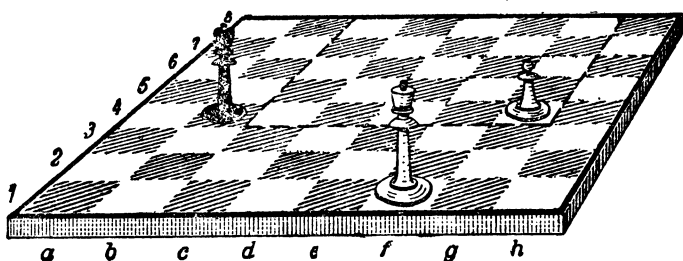


Рис. 54.

рис. 54. При этом белая пешка не защищена и ничто не препятствует передвижению чёрного короля по направлению к пешке.

Как определить, пройдёт ли белая пешка в ферзи или по дороге будет уничтожена чёрным королём?

Начинающие шахматисты, да и не только начинающие, решают эту задачу пробными «ходами» своих пальцев по клеткам доски, да ещё с приговорами: «он сюда, я сюда, он сюда...» и т. д.

Но среди шахматистов немало друзей математики, и им такой «способ» не к лицу. Вопрос: «Догонит ли

король пешку»? решается мгновенно при помощи «*правила квадрата*». Надо мысленно построить квадрат (рис. 54), одной стороной которого является предстоящий путь пеш-

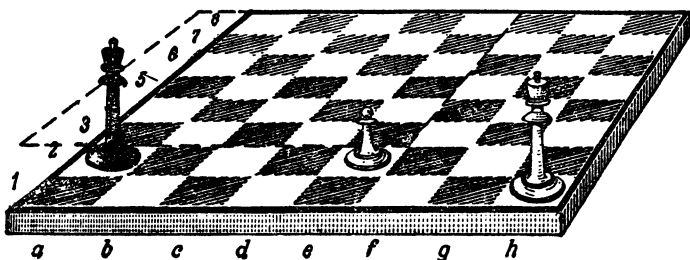


Рис. 55.

ки до последней линии доски*). Тогда, если король противника войдёт в этот квадрат (с любой его стороны)

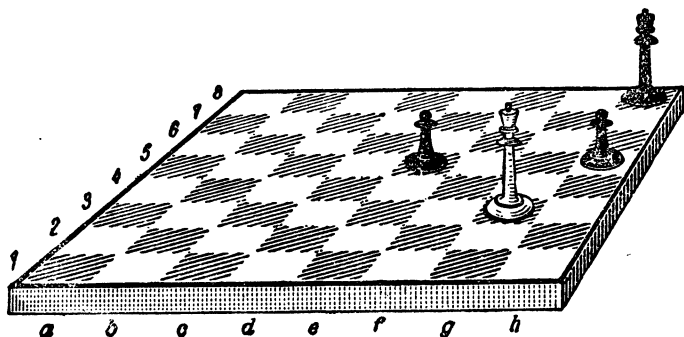


Рис. 56.

раньше, чем пешка покинет вершину угла квадрата, то король догонит пешку, если — нет, то пешка проходит в ферзи.

В позиции, изображённой на рис. 54, при ходе чёрных король попадёт в очерченный квадрат и, следовательно, задержит пешку белых; при ходе белых

*) Если возможно построить два таких квадрата (по обе стороны пути пешки), то из них выбирается тот, который ближе к королю.

король чёрных не успевает вступить в очерченный квадрат, и белые выигрывают. Вот и всё несложное «правило квадрата».

Если пешка находится в начальном положении, как на рис. 55, то первым ходом она, как известно, может быть передвинута на две клетки. В этом положении вершиной определяющего квадрата должна быть не та клетка, на которой стоит пешка, а следующая — по ходу движения пешки.

Используйте правило квадрата при решении этюда, изображённого на рис. 56.

Расположение фигур: белые: Кр g3, чёрные: Кр h8; пешки e5, h5.

Белые начинают и делают ничью.



ПОСТРОЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ПЕРЕГИБАНИЙ КВАДРАТНОГО ЛИСТА БУМАГИ

Традиционными инструментами геометрических построений являются циркуль и линейка. Но целый ряд геометрических задач можно будет решить, совсем не употребляя циркуля и линейки (разве только для нанесения заданных линий) при помощи перегибания листа бумаги, на котором выполняется построение.

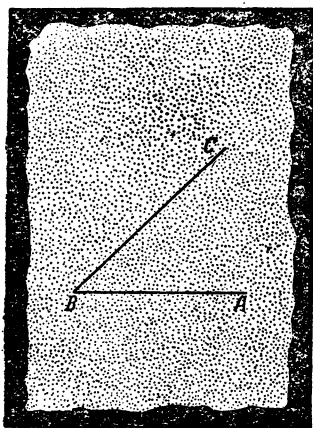


Рис. 57.

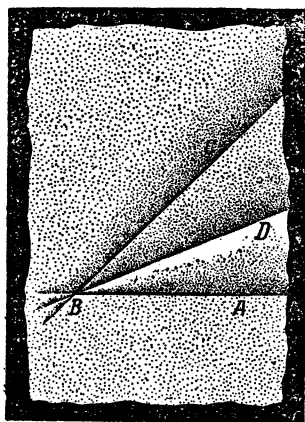


Рис. 58.

Пусть, например, требуется разделить данный угол ABC пополам (рис. 57). Отогнём бумагу по прямым BC и AB (не на лицевую сторону), а затем перегибанием совместим отогнутый край BC с отогнутым краем AB . Получившийся сгиб BD (рис. 58) и будет биссектрисой угла ABC .

Кусок бумаги произвольной формы можно при помощи перегибаний превратить в прямоугольник или в квадрат.

Отгните какую-либо часть данного куска бумаги. Пусть полученный таким образом сгиб будет XX_1 (рис. 59). Это — прямая линия. Теперь, проведя ножом по сгибу, отрежьте меньшую часть куска. Отгните другую часть бумаги так, чтобы при этом край XX_1 накладывался на себя. Получившийся прямолиней-

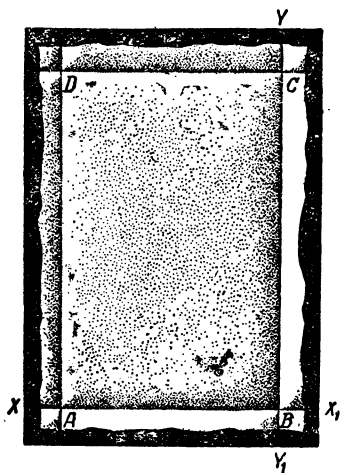


Рис. 59.

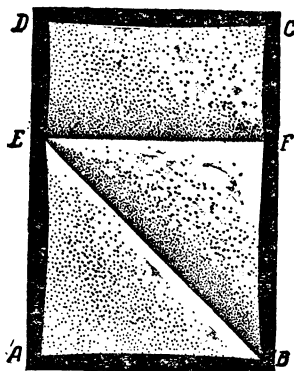


Рис. 60.

ный сгиб YY_1 будет перпендикуляром к XX_1 (смежные углы YBX и YBX_1 — прямые, так как они совпадали при наложении). Меньшую часть по сгибу отрежьте.

Повторяя указанный приём, образуйте края AD и CD . Фигура $ABCD$ — прямоугольник.

Пусть AB будет короткой стороной прямоугольника $ABCD$. Перегните прямоугольник $ABCD$ наискось так, чтобы край AB лёг на край BC (рис. 60). Кусок $EDCF$ удалите. Оставшаяся фигура $AEFB$ — квадрат.

Таким образом, на куске бумаги нетрудно образовать перпендикулярные или параллельные сгибы.

Можно представить себе и более сложные задачи на построение, которые интересны тем, что решаются перегибанием квадратного листа бумаги.

Три такие задачи мы предложим читателю решить самостоятельно, а две, для примера, рассмотрим сейчас.

Задача 1. Произвести «золотое сечение» стороны данного квадратного куска бумаги при помощи только перегибаний.

Напомним, что «золотым сечением» или иначе — делением в крайнем и среднем отношении называется деление данного отрезка AB точкой X таким образом,

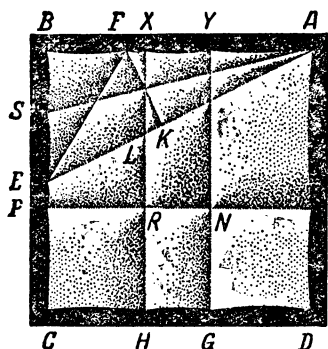


Рис. 61.

чтобы выполнялась пропорция $\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{BX}$ или

$$AX^2 = AB \cdot BX.$$

Решение. Складывая данный квадрат $ABCD$ пополам, найдём на стороне BC её середину E (рис. 61). Построим прямолинейный сгиб AE . Наложим BE на EA и в конце сгиба на стороне AB отметим точку F , а на AE — такую точку K , что $EK = BE$. Отложим на AB

отрезок $AX = AK$ (это тоже можно сделать перегибанием; линия сгиба AS), и тогда точка X — искомая.

Для доказательства наложим XB на XA (линия перегибания XH) и точку пересечения линии сгиба XH и прямой EA обозначим буквой L . Ясно, что при этом LX образует прямые углы с AB . Построим ещё сгиб FK (по двум точкам). Углы при точке K — прямые, так как по построению один из них равен углу при вершине B . Прямоугольные треугольники AXL и AKF равны; они имеют общий острый угол A и два равных катета: $AX = AK$ (по построению).

Отсюда $XL = FK$, а так как $FK = BF$, то

$$BF = XL \quad (1)$$

$\triangle ABE \sim \triangle AXL$ и $BE = \frac{AB}{2}$ (по построению); следовательно,

$$XL = \frac{AX}{2}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) имеем:

$$BF = \frac{AX}{2}. \quad (3)$$

Отметим на AB точку Y такую, что

$$BF = FY \quad (4)$$

(наложением BF на FA). Тогда $AB = AF + FB = AF + FY$. Очевидно также, что $AY = AF - FY$.

Перемножая полученные равенства, будем иметь:

$$AB \cdot AY = (AF + FY)(AF - FY) = AF^2 - FY^2.$$

Из (4) и (1) следует: $FY = FK$; тогда $AB \cdot AY = AF^2 - FK^2$. Но $AF^2 - FK^2 = AK^2$ (из прямоугольного треугольника AKF); кроме того, $AK = AX$ (по построению). Таким образом,

$$AB \cdot AY = AF^2 - FK^2 = AK^2 = AX^2$$

или

$$AX^2 = AB \cdot AY. \quad (5)$$

$$\text{Но } AX = \underset{(2)}{2 XL} = \underset{(1)}{2 BF} = \underset{(4)}{BF + BF} = BF + FY = BY.$$

Следовательно, $AX = BY$, а отсюда и

$$AY = BX. \quad (6)$$

Из (5) и (6) имеем:

$$AX^2 = AB \cdot BX. \quad (7)$$

Таким же образом легко показать, что и

$$BY^2 = AB \cdot AY, \quad (8)$$

то-есть точка Y в свою очередь делит отрезок AB в крайнем и среднем отношении.

Любопытно, что при этом отрезок AX делится точкой Y и отрезок BY делится точкой X тоже в крайнем и среднем отношении.

Для доказательства образуем на отрезках AX и BY данного квадрата, как на сторонах, квадраты $AXRM$ и $BYNP$ (следы этих построений на рис. 61 не показаны). Получится линия сгиба PM .

Равенство (8) показывает, что квадрат $BYNP$ равен велик прямоугольнику со сторонами AY и AD или в силу (6) — прямоугольнику $BXHC$.

Отнимем от площади каждой из этих двух равновеликих фигур площадь прямоугольника $BXRP$; останутся равновеликие прямоугольник $XYNR$ и квадрат $CPRH$.

Отсюда $XY \cdot XR = PR^2$ или так как $XR = AX$ и $PR = BX = AY$, то $XY \cdot AX = AY^2$, что и доказывает одно из высказанных утверждений. Второе доказывается аналогично.

Задача 2. Перегибанием куска бумаги легко разделить данный угол пополам, и вы без затруднений на квадратном или прямоугольном куске бумаги постройте углы в 45° , $22^\circ 30'$, $11^\circ 15'$ и т. д. Но как построить при

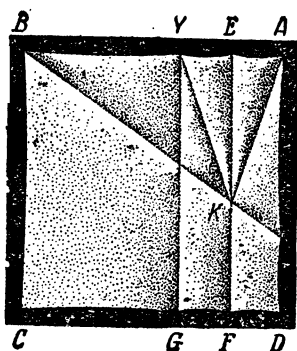


Рис. 62.

помощи перегибания угол в 36° , а следовательно, и в 72° , 18° , 9° и т. д.?

Оказывается, это возможно, если воспользоваться умением произвести «золотое сечение» стороны квадрата (см. предыдущую задачу).

Решение. Найдём точку Y , делящую сторону AB данного квадратного куска бумаги в крайнем и среднем отношении способом предыдущей задачи (рис. 62). Построим прямоугольник $AYGD$ и разделим его

пополам линией сгиба EF . Повернём YB около Y так, чтобы вершина B упала на EF , и это положение вершины A обозначим буквой K . Сделаем сгибы YK , KB и KA .

Покажем, что треугольник BAK — равнобедренный и каждый из углов BKA и KAB вдвое больше угла ABK .

По построению $BY = YK$ и $EY = AE$. Отсюда $YK = AK$ и $BY = YK = AK$. Далее, $\angle BAK = \angle KYA$, $\angle KBY = \angle YKB$; следовательно, $\angle KYA = 2\angle KBY$ (как внешний угол треугольника BYK) и

$$\angle BAK = 2\angle KBA. \quad (1)$$

Далее,

$$\begin{aligned} BK^2 &= EK^2 + BE^2 = AK^2 - AE^2 + BE^2 = \\ &= YK^2 + (BE^2 - AE^2) = BY^2 + (BE + AE)(BE - AE) = \\ &= BY^2 + AB(BE - YE) = BY^2 + AB \cdot AY, \end{aligned}$$

но $BY^2 = AB \cdot YB$; значит, $BK^2 = AB \cdot YA + AB \cdot BY =$
 $= AB(YA + BY) = AB \cdot AB = AB^2$ или $BK = AB$. Отсюда
 $\angle BAK = \angle BKA.$ (2)

Из (1) и (2) следует, что

$$\angle BAK = \angle AKB = 2\angle KBA,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\angle KBA = \alpha$, тогда $\angle BAK = \angle AKB = 2\alpha$, и

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ; \quad 5\alpha = 180^\circ; \quad \alpha = 36^\circ.$$

Таким образом, $\angle KBA = 36^\circ$, т. е. угол KBA — искомый.

Теперь попытайтесь самостоятельно решить несколько задач, пользуясь также только перегибанием заданной фигуры. В случае затруднений загляните в ответы (стр. 136—139).

Задачи

2. Зная, как согнуть из бумаги («построить») угол в 36° , разделите угол при вершине квадрата на 5 равных частей.

3. Вписать квадрат в произвольный треугольник, нарисованный на листе бумаги.

Вписать квадрат в треугольник — это значит: одна вершина квадрата должна лежать на первой стороне треугольника, другая вершина квадрата — на второй стороне треугольника и остальные две вершины квадрата — на третьей.

4. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник, имеющий с квадратом одну общую вершину.

В этом случае одна вершина треугольника должна быть общей с вершиной квадрата, а две другие вершины треугольника должны лежать на сторонах квадрата.



КВАДРАТ В КВАДРАТЕ

Иногда предлагают такую задачу-шутку:

— Чему равно 2 в квадрате?

— 4,— отвечает собеседник.

— А 3 в квадрате?

— 9.

— А 4 в квадрате?

— 16.

— А угол в квадрате?

Тот, кого спрашивают, конечно, недоумевает, так как ему никогда не приходилось умножать угол на угол.

Спрашивающий торжествует над затруднением собеседника и сам отвечает на вопрос: « 90° ».

Затем он поясняет, что имел в виду квадрат, как фигуру, а в квадрате все углы прямые.

Действительно, такого действия, как умножение угла на угол, не существует, но и вопрос был поставлен плохо. Если его предлагать не с целью шутки, то спросить надо так: «Чему равна величина угла при вершине квадрата?».

Заглавие «Квадрат в квадрате», конечно, тоже не предполагает второй степени квадрата. Речь пойдёт здесь о некоторых особенностях квадрата, вписанного в квадрат.

Соедините последовательно середины сторон квадрата $ABCD$ (рис. 63, *a*) отрезками и вы получите новый квадрат $EFLK$, площадь которого составляет половину площади данного квадрата $ABCD$.

Отрежем четыре прямоугольных треугольника, расположенных по углам квадрата $ABCD$. Сумма их площадей также составляет половину площади квадра-

та $ABCD$. Если принять площадь квадрата $ABCD$ за единицу, то сумма площадей отрезанных треугольников равна $\frac{1}{2}$.

В оставшийся квадрат $EFKL$ снова таким же образом впишем квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 63, б) и опятьотрежем

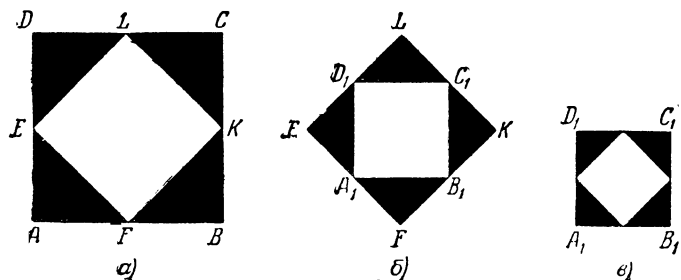


Рис. 63.

четыре треугольных уголка. Сумма площадей отрезанных треугольников составляет $\frac{1}{2}$ площади квадрата $EFKL$ и, значит, $\frac{1}{4}$ площади квадрата $ABCD$. Повторяя этот приём (рис. 63, в), мы получим еще четвёрку треугольников, сумма площадей которых составит $\frac{1}{8}$ площади квадрата $ABCD$.

Применяя этот приём любое число раз, мы будем получать всё новые четвёрки прямоугольных треугольников, которыми в конце концов снова можно выложить первоначальный квадрат. Суммы площадей четвёрок треугольников представляют бесконечный ряд чисел

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots *)$$

Следовательно, сумма этих чисел тем ближе к единице, чем больше число слагаемых, или, как говорят,

*) Геометрическая прогрессия с знаменателем $\frac{1}{2}$.

сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

стремится к 1 при неограниченно возрастающем n *).

Вернёмся к рис. 63, а и проследим теперь за изменением площади вписанного квадрата при перемещении его вершин по сторонам данного квадрата.

Отложим на сторонах квадрата $ABCD$ (рис. 64), начиная от вершины A и двигаясь в круговом направлении, равные произвольные отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 и последовательно соединим точки A_1, B_1, C_1, D_1 отрезками A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1A_1 .

Нетрудно показать, что $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат. В самом деле, $\triangle A_1AD_1 = \triangle B_1BA_1$ (равные катеты, по построению); отсюда

$$\begin{aligned} & A_1D_1 = A_1B_1 \\ & \text{и} \quad \angle AA_1D_1 = \angle BB_1A_1; \end{aligned}$$

$\angle AA_1D_1 + \angle BA_1B_1 = 90^\circ$, откуда следует, что угол $B_1A_1D_1$ — прямой.

Повторяем такие же рассуждения для второй пары треугольников и заключаем, что $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

Как же изменяется площадь S квадрата $A_1B_1C_1D_1$ в зависимости от изменения длины отрезка $AA_1 = x$?

Пусть сторона данного квадрата равна a ; тогда $A_1B = a - x$ и $BB_1 = x$. По теореме Пифагора

$$A_1B_1^2 = x^2 + (a - x)^2.$$

Но $S = A_1B_1^2$; следовательно,

$$S = x^2 + (a - x)^2.$$

*) Это записывают, применяя обозначение *предела*, так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 1.$$

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\begin{aligned}x^2 + (a-x)^2 &= a^2 - 2ax + 2x^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - 2ax + 2x^2 = \\&= \frac{a^2}{2} + 2 \left(\frac{a^2}{4} - ax + x^2 \right) = \frac{a^2}{2} + 2 \left(\frac{a}{2} - x \right)^2.\end{aligned}$$

Итак

$$S = \frac{a^2}{2} + 2 \left(\frac{a}{2} - x \right)^2.$$

При $x=0$ вписанный квадрат совпадает с данным квадратом $ABCD$. С возрастанием x от 0 до $\frac{a}{2}$ выражение $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ уменьшается от $\frac{a^2}{4}$ до нуля; следовательно, уменьшается и площадь S вписанного квадрата от a^2 до $\frac{a^2}{2}$. При возрастании x от $\frac{a}{2}$ до a выражение $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ увеличивается, и площадь квадрата возрастает от $\frac{a^2}{2}$ опять до a^2 .

Самой меньшей площадью обладает тот из вписанных квадратов, вершины которого находятся в серединах сторон данного квадрата.

Если продолжать увеличивать $x=AA_1$, придавая ему значения большие, чем a (например, на рисунке 64 принять в качестве x отрезок $AE > AB$), то вершины «вписанного» квадрата $EFLK$ будут лежать на продолжениях сторон квадрата $ABCD$ и площадь такого квадрата будет расти неограниченно.



СЛУЧАЙ С АЛМАЗОМ

Стоимость весового товара обычно пропорциональна его весу. За 300 граммов мороженого всегда приходится платить в 3 раза больше, чем за 100 граммов того же сорта. Но у некоторых редких и драгоценных камней особую ценность имеет их величина; стоимость таких камней пропорциональна квадрату их веса.

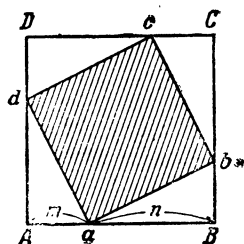


Рис. 65.

И вот однажды один из таких камней, алмаз, разбился на два куска; общий их вес остался, конечно, прежним.

Спрашивается, изменилась ли при этом общая стоимость алмазов, и если она, например, уменьшилась, то в каком случае потеря стоимости — самая большая?

Задача — не геометрическая. Но опираясь на знакомые свойства квадрата, можно и этой задаче дать очень наглядное решение.

Изобразим вес p неразбитого алмаза отрезком AB (рис. 65). Пусть цена единицы веса алмаза равна какой-то денежной единице.

Тогда стоимость всего алмаза равна p^2 , и её будет изображать площадь квадрата $ABCD$.

Пусть куски, на которые разбился алмаз, весят m и n единиц; их изобразят соответственно отрезки Aa и aB , причём $Aa + aB = AB$, так как $m + n = p$.

Отложим на сторонах квадрата $ABCD$ отрезки $Ad = Dc = Cb = Ba$ и построим фигуру $abcd$, которая, как известно (см. стр. 114), будет квадратом.

Общая стоимость двух кусков алмаза $(m^2 + n^2)$ изобразится суммой площадей квадратов со сторонами Aa и Ba или Aa и Ad , то-есть, в соответствии с теоремой Пифагора, — площадью квадрата $abcd$. Стоимость же нерасколотого алмаза, как сказано, изображается площадью квадрата $ABCD$.

Но площадь вписанного квадрата $abcd$ меньше площади квадрата $ABCD$, и самого меньшего значения достигает в том случае, когда точка a делит AB пополам (см. стр. 115).

Таким образом, ответ на задачу получен: стоимость двух кусков разбитого алмаза меньше стоимости одного неразбитого, причём проигрыш в стоимости будет наибольшим, если обе части разбитого алмаза равны между собой.

Потеря стоимости равна

$$p^2 - m^2 - n^2 \text{ или } (m + n)^2 - m^2 - n^2 = 2mn.$$

Если алмаз раскололся на два равных куска $\left(m = n = \frac{p}{2}\right)$, то потеря стоимости составит половину его первоначальной стоимости.



КВАДРАТ ОКОЛО КВАДРАТА

Есть в математике задачи, для решения которых недостаточно давно проложенных и широко известных путей и способов, а нужны, наоборот, приёмы новые, оригинальные, своеобразные.

Такие задачи особенно интересны. Их ещё мало в школьном обиходе, но, например, на математических олимпиадах они предлагаются часто.

Бывает, что из практики решения каких-либо нестандартных задач возникают новые математические теории. Например, из решения задач, относящихся к азартным играм, развилась теория вероятностей, результаты которой, в свою очередь, используются в различных областях современной науки и техники.

Применение нетрафаретных способов к решению задач требует, конечно, большой сноровки, но зато такими путями могут быть решены очень интересные задачи и получены замечательные, а часто и неожиданные результаты.

- Одна из таких задач относится к квадрату; она была предложена на XII Московской математической олимпиаде:

Докажите, что к квадрату нельзя приложить более 8 не налегающих друг на друга квадратов такого же размера.

Пусть $ABCD$ (рис. 66) — данный квадрат, сторону которого примем за единицу. Посмотрим, сколько таких же, не налегающих друг на друга квадратов, можно приложить к данному так, чтобы каждый из них соприкасался хотя бы одной точкой с данным квадратом.

Для этого построим вспомогательный квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (изображён штриховой линией), охватывающий данный, имеющий с ним общий центр и взаимно параллельные сто-

роны, но вдвое больше, чем у данного квадрата. Значит, периметр квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равен 8.

Возьмём квадрат $EFKL$, равный квадрату $ABCD$, и приложим его вершиной E к стороне CD .

Покажем, что при любых положениях квадрата $EFKL$ часть MN периметра квадрата $A_1B_1C_1D_1$, попавшая внутрь квадрата $EFKL$, не меньше стороны данного квадрата, то-есть не меньше 1.

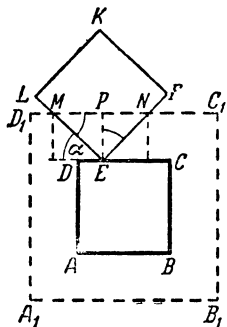


Рис. 66.

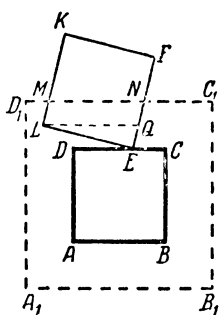


Рис. 67.

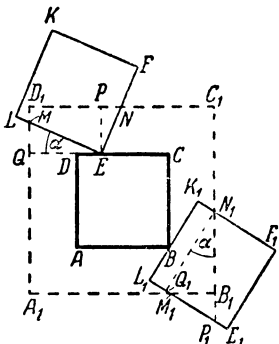


Рис. 68.

В положении, изображённом на рис. 66, часть MN стороны C_1D_1 вспомогательного квадрата $A_1B_1C_1D_1$ заключена между сторонами EF и EL квадрата $EFKL$. Обозначим угол LED через α и построим $EP \perp MN$. В этом случае $MN = MP + PN = EP \cdot \operatorname{ctg} \alpha + EP \cdot \operatorname{tg} \alpha = EP(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha)$.

Так как $EP = \frac{1}{2}$, то

$$MN = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{1}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Так как $\sin 2\alpha \leq 1$, то $\frac{1}{\sin 2\alpha} \geq 1$ и, значит, $MN \geq 1$.

Пусть теперь часть MN стороны вспомогательного квадрата лежит между сторонами EF и KL квадрата $EFKL$ (рис. 67). Проведём $LQ \parallel MN$. Фигура $MNQL$ — параллелограмм. Значит, $MN = LQ$, но $LQ > LE$; следовательно, $MN > LE$ или $MN > 1$.

Если $DE < \frac{DC}{2}$ и $\alpha < 45^\circ$, то может образоваться положение, представленное на рис. 68 (наверху).

Здесь рассматриваемая часть периметра MN состоит из трёх слагаемых: $MN = MD_1 + D_1P + PN$.

Продолжим ED до пересечения с A_1D_1 в точке Q . Тогда

$$\begin{aligned} MD_1 &= QD_1 - QM = QD_1 - (QD + DE) \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + DE \right) \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

$$D_1P = QE = \frac{1}{2} + DE, \quad PN = PE \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Складывая эти три равенства, получим:

$$\begin{aligned} MD_1 + D_1N &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha - DE \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} + DE + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = \\ &= 1 + DE(1 - \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned}$$

Так как этот случай возможен лишь при условии, что $\alpha < 45^\circ$, то $1 - \operatorname{tg} \alpha > 0$ и

$$MD_1 + D_1N > 1;$$

при $DE = 0$ $MD_1 + D_1N = 1$; при $\alpha = 0$ $MD_1 + D_1N = 1 + DE \geq 1$.

Теперь приложим квадрат $EFKL$ его стороной к вершине квадрата $ABCD$. И в этом случае часть периметра квадрата $A_1B_1C_1D_1$, отсекаемая квадратом $EFKL$, будет не меньше единицы при любом расположении квадрата $EFKL$.

Пусть, например, квадрат $EFKL$ находится в положении $E_1F_1K_1L_1$ (рис. 68 внизу). Требуется доказать, что

$$M_1B_1 + B_1N_1 > 1.$$

Проведём $N_1Q_1 \parallel K_1L_1$, продолжим N_1B_1 до пересечения в точке P_1 с E_1L_1 и введём обозначения:

$$\angle Q_1N_1B_1 = \alpha \text{ и } B_1N_1 = a.$$

Если $a > 1$, то требуемое неравенство сразу становится справедливым.

Пусть $a < 1$.

Из треугольника $N_1Q_1P_1$:

$$N_1P_1 = \frac{N_1Q_1}{\cos \alpha}$$

и так как $N_1Q_1=1$, то $N_1P_1=\frac{1}{\cos \alpha}$;

$$B_1P_1=N_1P_1-B_1N_1=\frac{1}{\cos \alpha}-a.$$

Так как

$$\angle P_1M_1B_1=\angle Q_1N_1B_1=\alpha,$$

то из треугольника $M_1B_1P_1$ имеем:

$$M_1B_1=B_1P_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \left(\frac{1}{\cos \alpha} - a \right) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - a \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Требуется доказать теперь, что

$$M_1B_1 + B_1N_1 = \frac{1 - a \cos \alpha}{\sin \alpha} + a > 1,$$

или равносильное неравенство (так как $\sin \alpha > 0$):

$$1 - a \cos \alpha + a \sin \alpha - \sin \alpha > 0.$$

Группируя слагаемые, получим:

$$1 \cdot (1 - \sin \alpha) - a (\cos \alpha - \sin \alpha) > 0.$$

По условию $a < 1$ и $\cos \alpha - \sin \alpha < 1 - \sin \alpha$, то-есть вычитаемое меньше уменьшаемого; следовательно, разность положительна, что и требовалось доказать.

Убедитесь в справедливости требуемого неравенства и для иных положений квадрата $EFLK$.

Итак, каким бы образом мы ни приложили квадрат $EFLK$ к квадрату $ABCD$, он высечет из периметра квадрата $A_1B_1C_1D_1$ часть, не бóльшую чем сторона данного квадрата $ABCD$. А таких сторон в периметре квадрата $A_1B_1C_1D_1$ восемь. Следовательно, больше

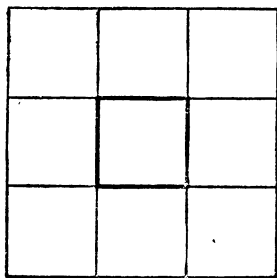


Рис. 69.

восьми квадратов нельзя приложить к данному квадрату. Но восемь квадратов, равных данному, располагаются около него так, как на рис. 69, и на основании проведённого анализа можно сказать, что это — наиболее плотное возможное расположение приложенных квадратов.

СОВЕРШЕННОЕ КВАДРИРОВАНИЕ

Перейдём к новой любопытной¹ задаче. Она долгое время не была решена, и многие думали, что её решить невозможно.

По содержанию это уже знакомая нам задача о составлении квадрата (или прямоугольника) из нескольких квадратов, но на этот раз *без разрезания их на части* и усложнённая ещё требованием, чтобы *стороны квадратов выражались неповторяющимися целыми числами*. Число данных квадратов безразлично.

Деление квадрата (или прямоугольника) на конечное число не налагающих друг на друга квадратов, никакие два из которых не равны, будем называть *совершенным квадратурованием* квадрата (или прямоугольника), а квадрат (или прямоугольник), составленный из неповторяющихся квадратов, — *совершенным квадратом* (или прямоугольником).

Некоторые математики высказывали предположение, что совершенное квадратурование квадрата невозможно^{*)}.

Так как невозможность квадратурования квадрата только допускалась математиками, но не была доказана, то поиски решения продолжались, и немногим более десяти лет тому назад в зарубежных математических журналах появились, наконец, квадраты, составленные из неповторяющихся квадратов. На рис. 70 представлен квадрат, состоящий из 26 неодинаковых квадратов. (Цифры,

^{*)} Очевидно, из этих же предположений исходил и Г. Штейнгауз, утверждая в книге «Математический калейдоскоп», что «неизвестно также, можно ли разбить квадрат на неповторяющиеся квадраты» (стр. 9). (Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, Гостехиздат, 1949.)

проставленные на рисунке, означают длины сторон соответствующих квадратов). Можно составить квадрат также и из 28 неповторяющихся квадратов и т. д.

Не вполне выясненным остаётся пока ещё вопрос о том, является ли 26 — наименьшим возможным числом квадратов для составления совершенного квадрата.

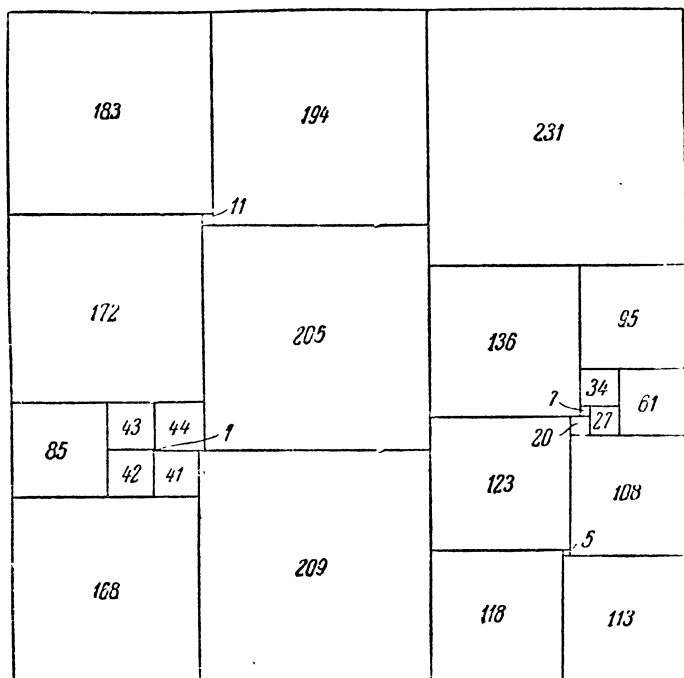


Рис. 70.

Совершенное квадрирование прямоугольника также возможно; для этого достаточно девяти квадратов со сторонами 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 и 18 (мы привели их в головоломке **21** на стр. 24).

В настоящее время установлено, что меньше чем из 9 неодинаковых квадратов совершенный прямоугольник составить невозможно, а годятся ли для этой цели иные квадраты, кроме приведённых в головоломке **21**, мы с вами вскоре узнаем.

Вообще вся эта проблема квадрирования прямоугольника и квадрата пока ещё не имеет такого простого решения, чтобы его можно было изложить коротко и популярно. Но обнаружилась неожиданная связь между задачей о составлении прямоугольника (или квадрата) из определённого числа квадратов и некоторыми законами постоянного электрического тока в замкнутой цепи. Эта связь очень любопытна, проста и интересна. Для того чтобы с ней познакомиться, нам понадобится только очень простая форма законов, известных в физике под названием «системы уравнений Кирхгофа» или «правил Кирхгофа».

КВАДРАТЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ

Правила Кирхгофа легко усвоить, если даже вы их ещё и не изучали.

Представьте себе какую-нибудь сеть, состоящую из проводников тока (рис. 71), в которой можно выделить несколько замкнутых контуров (например, $abca$, $bcdab$, $abdcab$). Пусть по каждому проводнику в направлении, отмеченном стрелкой, протекает постоянный ток, величина которого обычно обозначается буквой i со значком, указывающим номер проводника (i_1 , i_2 , i_3 и т. д.).

Первая система уравнений Кирхгофа относится к узловым точкам a , b , c , d . В каждой узловой точке ток разветвляется так, что сумма входящих в неё токов равна сумме отходящих токов. Если условимся считать положительными токи, входящие в узловую точку, и отрицательными — токи, выходящие из той же точки, то можно сказать, что *алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю*,

Например, на рис. 71

$$\text{для узла } a: i_1 - i_2 - i_3 = 0,$$

$$\text{» » } b: i_3 - i_4 - i_7 = 0,$$

$$\text{» » } c: i_2 + i_4 - i_5 - i_6 = 0$$

и т. д.

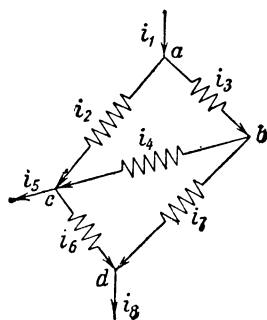


Рис. 71.

Вторая система уравнений Кирхгофа относится к замкнутым контурам.

Условимся, обходя контур и придерживаясь всё время одного и того же направления, например по движению часовой стрелки, считать положительными те токи, направление которых совпадает с направлением обхода, и отрицательными — те, направление которых противоположно направлению обхода.

Второе правило Кирхгофа сформулируем только для такой сети, в которой сопротивления всех проводников одинаковы и равны единице, а электродвижущие силы в замкнутом контуре отсутствуют. В этом случае *при обходе каждого замкнутого контура алгебраическая сумма сил токов равна нулю.*

Так, например, на рис. 71

$$\text{для контура } abca: i_3 + i_4 - i_2 = 0,$$

$$\text{» » } bdc b: i_7 - i_6 - i_4 = 0,$$

$$\text{» » } abdc a: i_3 + i_7 - i_6 - i_2 = 0.$$

При помощи уравнений Кирхгофа, составленных для узлов и контуров, и рассчитывают сети разветвлённых токов, т. е. вычисляют силу тока в каждом проводнике.

Замечательная связь между квадратами и электрическими токами состоит в следующем. Если мы построим произвольную сеть из n проводников единичных сопротивлений, составляющих некоторое количество замкнутых контуров, и рассчитаем соответственно возможную силу тока в каждом проводнике, то полученные силы токов дадут значения сторон n квадратов, необходимых для составления прямоугольника.

Другими словами, *всякому комплекту из n квадратов, необходимых для составления одного прямоугольника (или квадрата) соответствует распределение токов по правилам Кирхгофа в сети, построенной определённым образом из n проводников.*

И обратно:

Распределению токов в сети, определённым образом составленной из n проводников, соответствует такой комплект из n квадратов, из которого может быть составлен некоторый прямоугольник.

Из-за сложности мы эти утверждения не будем доказывать в общем виде; однако любой пример подтвердит их правильность.

Предположим, мы решили составить прямоугольник непременно из 9 каких-нибудь (не данных нам) квадратов. Мы должны сами определить длины сторон подходящих для этого квадратов.

Если исключить тривиальный*) случай, когда все 9 квадратов одинаковы, то ясно, что для этой цели пригодны только специально подобранные квадраты. Но как их подобрать? Было бы очень трудно получить решение только путём проб.

Сконструируем какую-нибудь замкнутую сеть из 9 проводов с соблюдением следующих условий: два узла — самый верхний и самый нижний — пусть будут главными, причём от верхнего главного узла токи только отходят, а к нижнему главному — только подходят. Остальные узлы расположены между главными на разных уровнях; токам дадим направление от узлов выше лежащих к ниже лежащим. Сопротивления всех проводников считаем единичными. Такую сеть с любым, заранее намеченным числом проводов построить совсем нетрудно.

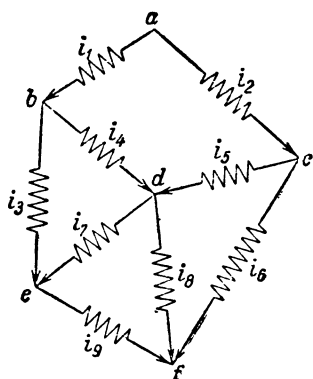


Рис. 72.

Пусть это, например, будет сеть, изображённая на рис. 72. Здесь a и f — главные узлы.

Составим систему уравнений Кирхгофа для всех узлов (кроме главных) и для простейших замкнутых контуров:

$$\begin{array}{ll} \text{Для узла } b: & i_1 - i_3 - i_4 = 0, \\ \text{» } c: & i_2 - i_5 - i_6 = 0, \\ \text{» } d: & i_4 + i_5 - i_7 - i_8 = 0, \\ \text{» } e: & i_3 + i_7 - i_9 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Для контура } acdba: & i_2 + i_5 - i_4 - i_1 = 0, \\ \text{» } bdeb: & i_4 + i_7 - i_3 = 0, \\ \text{» } cfdc: & i_6 - i_8 - i_5 = 0, \\ \text{» } dfed: & i_8 - i_9 - i_7 = 0. \end{array}$$

*) То-есть простейший, совершенно очевидный.

Получилось восемь уравнений с девятью неизвестными. Девятого уравнения, независимого от этих восьми, мы составить не сможем. Можно, конечно, обойти ещё какой-нибудь замкнутый контур, например *acdeba*, но уравнение, которое при этом получится, не приведёт к существенно новому соотношению между искомыми токами; оно будет следствием имеющихся уравнений.

Такая система имеет бесчисленное множество решений. Но можно выразить через одно неизвестное, например через i_1 , все остальные неизвестные i_2, i_3, \dots, i_8 . Это можно сделать, например, последовательным исключением неизвестных. Так, из четвёртого и восьмого уравнений можно исключить i_9 ; из полученного уравнения, третьего и седьмого уравнений можно исключить i_8 и т. д. Решая систему в предположении, что i_1 известно, получим:

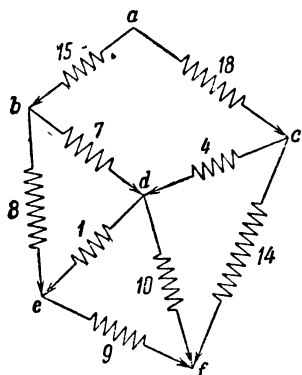


Рис. 73.

$$i_2 = \frac{18}{15} i_1, \quad i_3 = \frac{8}{15} i_1, \quad i_4 = \frac{7}{15} i_1,$$

$$i_5 = \frac{4}{15} i_1, \quad i_6 = \frac{14}{15} i_1, \quad i_7 = \frac{1}{15} i_1,$$

$$i_8 = \frac{10}{15} i_1, \quad i_9 = \frac{9}{15} i_1.$$

Пусть $i_1 = 15$; тогда одно из решений нашей системы в целых числах будет:

$$i_1 = 15, \quad i_2 = 18, \quad i_3 = 8,$$

$$i_4 = 7, \quad i_5 = 4, \quad i_6 = 14,$$

$$i_7 = 1, \quad i_8 = 10, \quad i_9 = 9.$$

Обратите внимание: мы получили те самые 9 чисел, которые представляют стороны девяти квадратов головоломки **21** на стр. 24.

Сеть распределения токов (рис. 73) даёт также и ключ к фактическому составлению прямоугольника из квадратов с найденными длинами сторон.

Каждый узел сети соответствует уровню верхних сторон квадратов, длины сторон которых равны токам, выходящим из этого узла.

Так, $i_1 = 15$ означает: положите на стол квадрат со стороной 15 (рис. 74), к его нижней стороне приложите квадраты

со сторонами $i_3 = 8$ и $i_4 = 7$. Сохраняя уровень верхней стороны квадрата со стороной $i_1 = 15$, приложите к нему рядом квадрат со стороной $i_2 = 18$, а к нижней стороне этого квадрата приложите квадраты со сторонами $i_5 = 4$ и $i_6 = 14$. От узла d отходят токи $i_7 = 1$ и $i_8 = 10$; это значит: приложите квадраты 1 и 10 к нижним сторонам квадратов 7 и 4. Положите ещё квадрат 9 на своё место, — и прямоугольник готов (рис. 74).

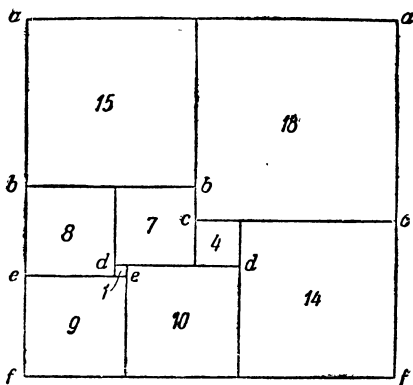


Рис. 74.

Вот как законы физики, управляющие распределением токов в замкнутых сетях, помогли не только составить прямоугольник из готовых квадратов, но и найти размеры сторон необходимых квадратов.

Давайте теперь составим иную сеть из 9 проводников. При соблюдении тех же условий это может быть, например, такая сеть, как на рис. 75.

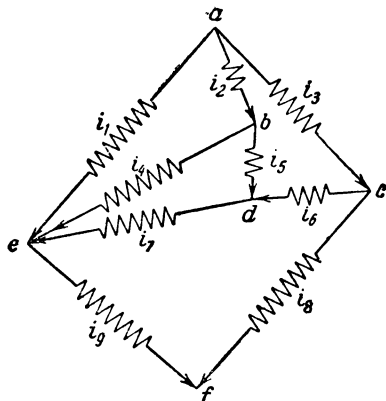


Рис. 75.

Составим систему из 8 уравнений и, решая её, выразим все токи через i_1 (проделайте вычисления самостоятельно!).

Будем иметь:

$$i_2 = \frac{16}{25} i_1, i_3 = \frac{28}{25} i_1, i_4 = \frac{9}{25} i_1, i_5 = \frac{7}{25} i_1,$$

$$i_6 = -\frac{5}{25} i_1, i_7 = \frac{2}{25} i_1, i_8 = \frac{33}{25} i_1, i_9 = \frac{36}{25} i_1.$$

Отрицательный знак i_0 показывает, что сеть надо слегка подправить: ток направить не от c к d , как это мы произвольно предположили, а от d к c и соответственно этому узел c надо опустить ниже узла d . Подправленная сеть с указанием возможных величин токов представлена на рис. 76, а соответствующий этой сети прямоугольник — на рис. 77.

Таким образом, для составления прямоугольника мы получили ещё один комплект из девяти неповторяющихся

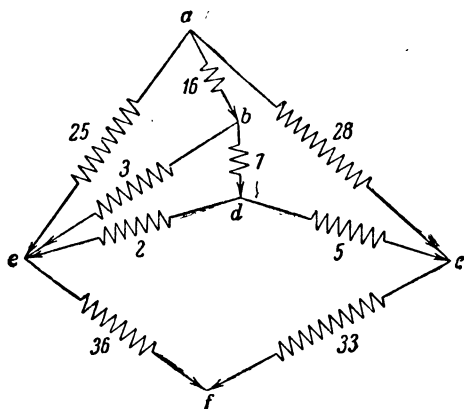


Рис. 76.

квадратов, и этим исчерпываются все случаи совершенного квадрирования прямоугольника из девяти квадратов.

В самом деле, составляя всевозможные сети с двумя главными узлами из девяти проводников (практически их исчерпать нетрудно) и, рассчитывая всякий раз соответствующие силы токов в проводниках, вы чисто опытным путём можете убедиться в том, что неодинаковые токи получаются только в тех двух конфигурациях из девяти проводников, которые только что были рассмотрены. А так как каждому комплекту из девяти квадратов, составляющих прямоугольник, соответствует одна из возможных конфигураций девяти проводников, то значит, могут быть только два комплекта из девяти неодинаковых квадратов, составляющих прямоугольник.

Для получения новой сети поверните, например, рисунок 76 на 90° , примите c и e за главные узлы и измените соответственно направления токов — вот вам и новая конфигурация из девяти проводников, и очевидно, что в этих проводниках будут встречаться и равные токи.

Точно так же, составляя сети с двумя главными узлами из 4, 5, 6, 7 или 8 проводников, можно убедиться в том, что во всех этих случаях получаются только

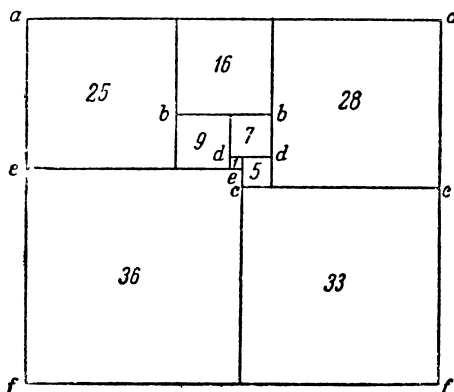


Рис. 77.

повторяющиеся квадраты (проверьте это на практике).

Чем больше проводников, тем больше разнообразных сетей можно из них составить. Если, составляя и рассчитывая сети из 9 проводников, мы получили только два комплекта неповторяющихся квадратов, то, например, из 10 проводников можно скомбинировать 6 таких сетей, на основе которых можно получить 6 комплектов неповторяющихся квадратов для составления прямоугольника.

В заключение рассчитаем ещё одну из возможных сетей с 11 проводниками, причём мы заведомо идём на то, что, по крайней мере, два квадрата будут одинаковыми, так как узел d соединяет только два проводника и, следовательно, $i_6 = i_7$ (рис. 78).

Составляем соответствующую систему уравнений Кирхгофа:

$$\begin{array}{ll}
 (b) \ i_1 - i_4 - i_6 = 0, & (acba) \ i_2 - i_4 - i_1 = 0, \\
 (c) \ i_2 + i_4 - i_5 - i_8 = 0, & (aeca) \ i_3 - i_5 - i_2 = 0, \\
 (d) \ i_6 - i_7 = 0, & (bcfdb) \ i_4 + i_8 - i_7 - i_6 = 0, \\
 (e) \ i_3 + i_5 - i_9 - i_{11} = 0, & (cefc) \ i_5 + i_9 - i_8 = 0, \\
 (f) \ i_7 + i_8 + i_9 - i_{10} = 0, & (egfe) \ i_{11} - i_{10} - i_9 = 0.
 \end{array}$$

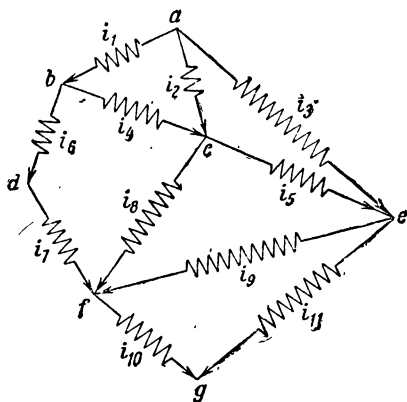


Рис. 78.

Проделав необходимые вычисления, получим:

$$\begin{aligned}
 i_2 &= \frac{4}{3} i_1, \quad i_3 = 2i_1, \quad i_4 = \frac{1}{3} i_1, \quad i_5 = \frac{2}{3} i_1, \quad i_6 = \frac{2}{3} i_1, \\
 i_7 &= \frac{2}{3} i_1, \quad i_8 = i_1, \quad i_9 = \frac{1}{3} i_1, \quad i_{10} = 2i_1, \quad i_{11} = \frac{7}{3} i_1.
 \end{aligned}$$

Положив $i_1 = 3$, будем иметь комплект из 11 квадратов со следующими сторонами:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= 3, \quad i_2 = 4, \quad i_3 = 6, \quad i_4 = 1, \quad i_5 = 2, \quad i_6 = 2, \\
 i_7 &= 2, \quad i_8 = 3, \quad i_9 = 1, \quad i_{10} = 6, \quad i_{11} = 7.
 \end{aligned}$$

Если теперь уложить их так, как подсказывает сеть, то получим (рис. 79) квадрат (13×13), но это не будет совершенный квадрат, так как он составлен не из повторяющихся квадратов.

Кстати, этот пример раскрывает «тайну рождения» головоломки **22** (стр. 25) и даёт её решение.

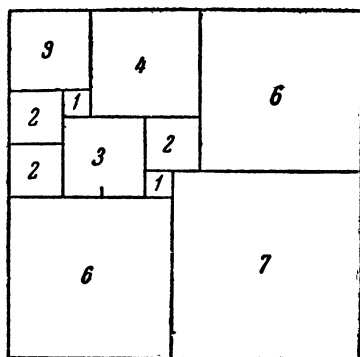


Рис. 79.

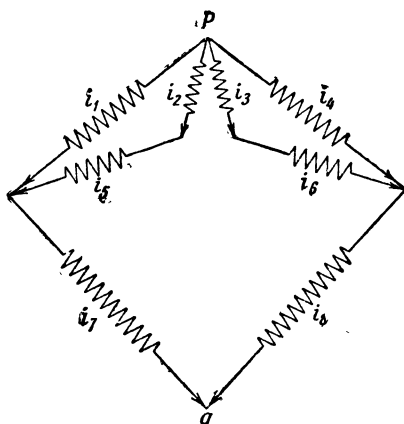


Рис. 80.

Для желающих самостоятельно поупражняться предлагаем ещё несколько задач.

Задачи

5. Пользуясь сетью с двумя главными узлами p и q , данной на рис. 80, составьте прямоугольник из 8 квадратов.

6. Превратите сеть, состоящую из 11 проводов (рис. 78), в сеть из 10 проводов путём замены проводов bd и df одним проводом bf . Составьте и решите соответствующую систему уравнений Кирхгофа. Постройте прямоугольник из 10 квадратов. Будет ли он совершенным?

7. Дан прямоугольник (рис. 81), составленный из 7 квадратов с указанными размерами сторон. Постройте

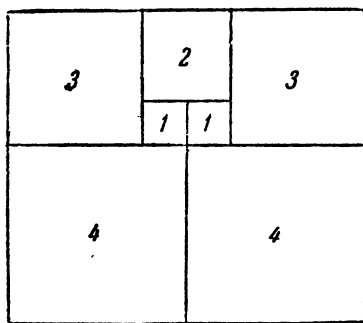


Рис. 81.

замкнутую сеть с двумя главными узлами, соответствующую данному прямоугольнику. Распределите токи по проводам и убедитесь в справедливости правил Кирхгофа.

8. Постройте сеть по следующим данным:

$$ab = 60, \quad ac = 44, \quad cb = 16, \quad cd = 28, \quad bd = 12,$$

$$be = 19, \quad de = 7, \quad bf = 45, \quad ef = 26, \quad df = 33,$$

где a, b, c, d, e, f — узлы, причём a и f — главные узлы. Направление токов соответствует порядку следования букв в наименовании проводника. Так, в проводнике ab ток направлен от узла a к узлу b ; в проводнике ac — от узла a к узлу c и т. д. Составьте соответствующий прямоугольник.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЛАВЫ III

1. Каждый прямоугольник, описанный около данного (рис. 82), превышает его площадь на величину площади четырёх прямоугольных треугольников. При изменении положения описанного прямоугольника каждая вершина прямого угла описывает соответствующую полуокружность, как геометрическое место вершин прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу, а величина площади каждого из четырёх рассматриваемых треугольников изменяется и принимает наибольшее значение тогда, когда высота треугольника достигает величины радиуса этой полуокружности. В этом положении прямоугольные треугольники становятся равнобедренными, попарно равными.

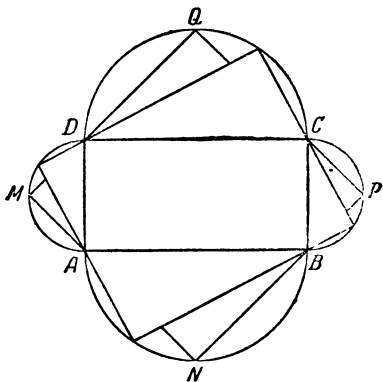


Рис. 82.

Возможен ли описанный прямоугольник с такими треугольниками? Да. Это следует из того, что суммы углов при A, B, C и D образуют развёрнутые углы ($45^\circ + 90^\circ + 45^\circ$) и, следовательно, MAN, NBP, PCQ и QDM — не ломанные линии, а прямые. Кроме того, $MN = NP = PQ = QM$, так как они состоят из равных отрезков; следовательно, $MNPQ$ — квадрат.

Итак, из всех прямоугольников, описанных около данного прямоугольника, наибольшую площадь имеет квадрат.

2. Для того чтобы при помощи перегибаний квадратного куска бумаги $ABCD$ разделить прямой угол на 5 равных ча-



3. Пусть требуется вписать квадрат в данный треугольник ABC (рис. 84). Перегнём бумагу по BC и построим сгибы CD и BE , перпендикулярные к BC . Наложим BC на CD , CB на BE и отметим точки D и E . Сгибом DE завершим построение вспомогательного квадрата $BCDE$. Построим сгибы, соединяющие точки A и D , A и E . Обозначим буквами F и G точки пересечения сгибов AE и AD со сто-

роной BC . Перегнём FB по FC и GC по GB ; получим $FL \perp BC$ и $GK \perp BC$. Соединим точки L и K сгибом LK .

Для доказательства достаточно показать, что

$$LF = KG = FG,$$

$\triangle ALF \sim \triangle ABE$ ($LF \parallel BE$); следовательно,

$$\frac{AF}{AE} = \frac{LF}{BE}. \quad (1)$$

$\triangle AFG \sim \triangle AED$ ($FG \parallel ED$); следовательно,

$$\frac{AF}{AE} = \frac{FG}{ED}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{LF}{BE} = \frac{FG}{ED}.$$

Но $BE = ED$; следовательно, и $LF = FG$. Аналогично доказываем, что $KG = FG$, и значит, $LF = FG = KG$.

4. Пусть требуется вписать равносторонний треугольник в данный квадрат $ABCD$ (рис. 85).

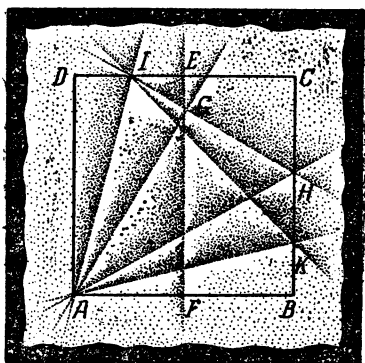


Рис. 85.

Наложим BC на AD , получим сгиб EF — среднюю линию квадрата. Перегнём AB около точки A так, чтобы вершина B легла на EF . Отметим это положение вершины B буквой G и линию сгиба — AH . Соединим точки G и H сгибом до пересечения со стороной DC в точке I . Наложим AB на AH ; получившийся сгиб AK даст одну сторону искомого треугольника, а сгибы KI и AI — остальные две стороны.

Нетрудно доказать, что $AK=KI=AI$. Пусть сторона квадрата равна a . Соединим отрезком точки A и G , тогда $AG=AB=a$ (в результате перегибания по линии AH). $AF=\frac{a}{2}$; следовательно,

$$\begin{aligned}\angle AGF &= 30^\circ, \quad \angle GAF = 60^\circ, \\ \angle HAB &= \angle HAG = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ, \\ \angle KAB &= \angle KAH = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ, \\ \angle FGH &= \angle AGH - \angle AGF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, \\ \angle EGI &= \angle FGH = 60^\circ.\end{aligned}$$

Из треугольника AFG :

$$FG = AG \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда

$$EG = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = a \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Из треугольника IEG :

$$IE = EG \operatorname{tg} 60^\circ = a \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt{3} = a \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}DI &= DE - IE = \frac{a}{2} - a \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) = \\ &= a \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) = a (2 - \sqrt{3}).\end{aligned}\quad (1)$$

Из треугольника AKB :

$$KB = a \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = a \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = a \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = a (2 - \sqrt{3})^*).$$
 (2)

*) Выражение $a \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$ было преобразовано по формуле тригонометрии $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$. Читатель, ещё не знакомый с формулами тригонометрии, может вычислить KB по теореме: биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам. В треугольнике

Из (1) и (2) следует, что $DI=KB$. Так как в прямоугольных треугольниках ADI и ABK $AD=AB$, то

$$\triangle ADI = \triangle ABK.$$

Отсюда $AI=AK$ и $\angle DAI = \angle BAK = 15^\circ$. Следовательно, $\angle KAI = 60^\circ$.

Но если угол при вершине равнобедренного треугольника равен 60° , то треугольник KAI — равносторонний, что и требовалось доказать.

5. В силу симметричности сети (рис. 80 на стр. 133) можно сразу положить $i_2=i_3=1$; тогда $i_5=i_6=1$, $i_1=i_2+i_5=2$ и $i_4=i_3+i_6=2$ и, следовательно, $i_7=i_8=3$. Соответствующий прямоугольник изображён на рис. 86.

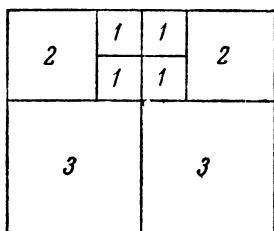


Рис. 86.

6. В соответствии с обозначениями рис. 78 на стр. 132 стороны искомым квадратов будут:

$$\begin{aligned} ab &= 15, \quad ac = 17, \quad ae = 25, \\ bdf &= 13, \quad bc = 2, \quad cf = 11, \\ ce &= 8, \quad ef = 3, \quad eg = 30, \quad fg = 27. \end{aligned}$$

Все стороны различны; значит, прямоугольник — совершенный. Составьте искомый прямоугольник самостоятельно.

ABH угол $BAH=30^\circ$, следовательно, $AH=2HB$. Если $HB=x$, то $AH=2x$, $AB^2=AH^2-HB^2$, $a^2=4x^2-x^2$, $a^2=3x^2$,

$$HB=x=\frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad AH=2x=\frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Далее, $\frac{HK}{BK}=\frac{AH}{AB}$; $\frac{HK+BK}{BK}=\frac{AH+AB}{AB}$ (производная пропорция);

$$\frac{HB}{BK}=\frac{AH+AB}{AB};$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{BK}=\frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}+a}{a};$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3BK}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3};$$

$$BK=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}=\frac{a\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)}=\frac{a(6-3\sqrt{3})}{3}=a(2-\sqrt{3}).$$

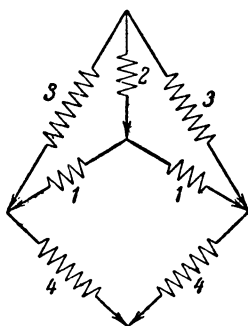


Рис. 87.

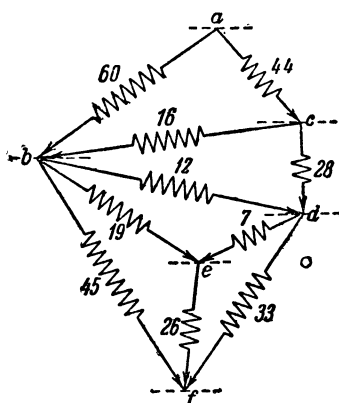


Рис. 88.

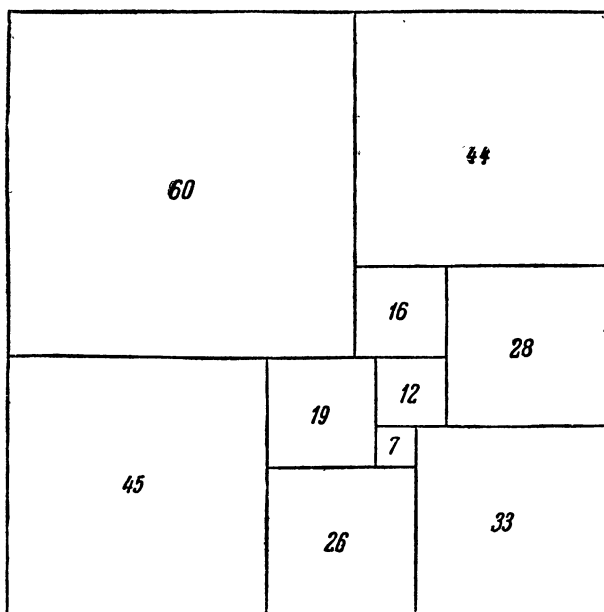


Рис. 89.

7. Искомая сеть показана на рис. 87.

8. Для построения сети наметим примерно линии уровня, соответствующие данным узлам (на рис. 88 штриховые линии).

Узел a наметим в произвольной точке, и на произвольном расстоянии вниз от этой точки проведём линию уровня узла b . Линия уровня узла c пройдёт выше точки b , так как величина тока в проводнике ac меньше, чем в проводнике ab . Сравнивая величины токов в остальных проводниках, устанавливаем последовательное расположение линий уровня узлов d , e и f . Произвольные точки на линиях уровня отмечаем в качестве соответствующих узлов и располагаем между ними изображения проводников. Получается сеть, изображённая на рис. 88.

Соответствующий этой сети прямоугольник представлен на рис. 89.



ПОСЛЕСЛОВИЕ

РАЦИОНАЛЬНЫЙ РАСКРОЙ МАТЕРИАЛОВ

В «Диалектике природы» Ф. Энгельс писал: «...уже с самого начала возникновение и развитие наук обусловлено производством» *).

Как ни примитивна была техника архитектурных сооружений древнего мира, но и она выдвигала разнообразные математические задачи, в том числе и задачу геометрического перекраивания фигур.

Рассматривая в этой книжке вопросы, касающиеся квадрата, мы привели два исторических примера: задачу, предложенную практиками-строителями арабскому геометру Абул Вефе (стр. 37) и задачу времён Галилея с превращением прямоугольной доски в квадратную (стр. 58), а также много других разнообразных задач на превращение фигур.

Некоторые из указанных нами решений этих задач, несомненно, могут быть улучшены, выполнены более экономно,— мы будем рады узнать об этом.

Если читатель «Удивительного квадрата» — производитель, — перекраивая кусок дорогой кожи, ткани или лист цветного металла, сам начнёт поиски такого раскроя, при котором не пропадало бы ни сантиметра материала, то мы скажем — наша книжка достигла цели.

*) Ф. Энгельс, Диалектика природы. Госполитиздат, М.—Л. 1948, стр. 147.

Если читатель только подновит свои геометрические представления и ещё более заинтересуется широкими практическими возможностями математики, мы тоже скажем — книжка достигла цели.

Советские математики, продолжая традицию корифеев русской математики: Н. И. Лобачевского, П. Л. Чебышева, Н. Е. Жуковского, А. Н. Крылова и других, не отрывают науку от практики, глубоко разрабатывают её прикладные стороны.

Искуснейший исследователь разнообразных математических и технических проблем — петербургский академик Пафнутий Львович Чебышев — тоже не прошёл мимо вопросов раскрытия материалов.

Результаты своих очень тонких и своеобразных исследований проблемы наиболее точного покрытия кривой поверхности плоскими выкройками из ткани П. Л. Чебышев доложил конференции учёных, собравшихся в Клермон-Ферране (Франция) в 1878 году. Заканчивая сообщение, названное им «О кройке одежды», П. Л. Чебышев сказал:

«Чтобы проверить этот результат исчисления, я сделал чехол для шара, разрезая куски соответственно выше-сказанному. Два куска указанной формы, будучи скроены и сшиты, соответственно с тем, что мы описали, дали результат, не оставляющий желать лучшего, как вы сами можете судить. Это доказывает, насколько вышеизложенные соображения согласуются с практикой».

С этими словами великий учёный представил собравшимся мяч, который с наилучшим приближением облегался чехлом.

П. Л. Чебышев указал также и способ наивыгоднейшего прикладывания кусков материи при её сшивании, предупредив при этом, что решение задачи существенно изменится, если взять вместо материи кожу.

Плановое, социалистическое производство базируется на новой, передовой технике, и вопрос о раскрытии материалов получает дальнейшее развитие.

В целом ряде производств встречается такой раскрой промышленных материалов (листового железа, фанеры, пластмассы и т. п.), который нет надобности осуществлять точно (без обрезков), но всё же и в этом случае заранее рассчитанный план наиболее рационального раскроя может обеспечить наибольшую экономию материала, что особенно важно при выработке серийной продукции. Так, например, для изготовления некоторых деталей автомашины ЯГ-6 нужны прямоугольные заготовки размером 135×161 мм². Их приходится вырезать из листов размером 710×1420 мм².

Вариант 1

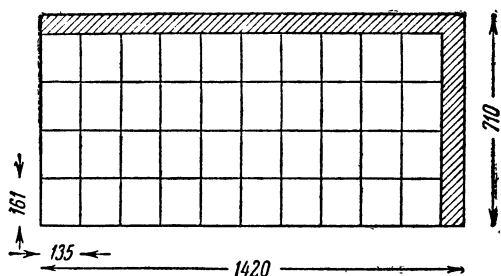


Рис. 90.

Вариант 2

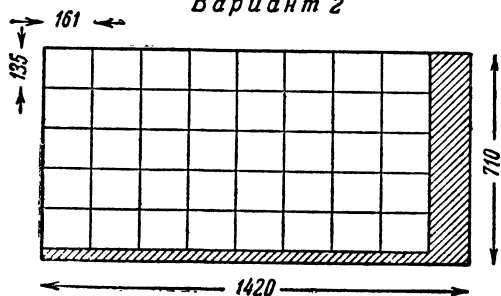


Рис. 91.

Как произвести необходимую разметку каждого листа?

На рис. 90 и 91 приведены два варианта обычной, примитивной разметки, при которой прямоугольники располагаются подряд вдоль либо поперёк листа.

Как видно, оба варианта в этом случае дают одинаковое количество заготовок — по 40 из листа. Если же разделить площадь листа $1420 \times 710 \text{ мм}^2$ на площадь одной заготовки $161 \times 135 \text{ мм}^2$, то получится примерно 46 заготовок.

Выходит, что при разметке, указанной на рис. 90 и 91, теряется 6 заготовок.

Конечно, технически невозможно добиться такого раскроя, чтобы получились все 46 заготовок. Но, с другой стороны, и 40 заготовок из листа — это всё-таки не предел для количества заготовок, которое можно получить из данного листа.

Вариант более рационального раскроя (рис. 92) даёт 44 заготовки из листа, то-есть 10 процентов экономии металла по сравнению с обычными вариантами раскроя.

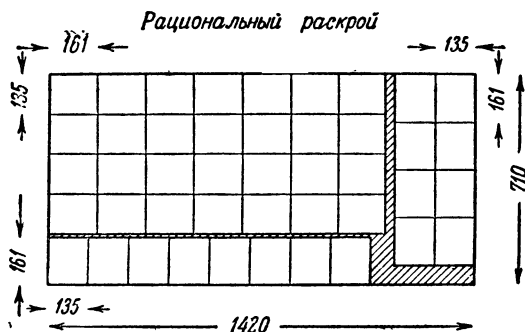


Рис. 92.

Такой план наиболее экономного раскроя — не случайная находка догадливого человека, а результат применения специального математического расчёта, так называемого *метода разрешающих множителей* (индексов), сравнительно недавно разработанного лауреатом Сталинской премии, профессором математики Л. В. Канторовичем (Ленинград).

Изложим этот способ расчёта раскроя и примеры его применения.

Для комплектности изделия часто требуется неодинаковое число заготовок разных размеров, которые должны быть

выкроены из одинаковых кусков имеющегося материала или, наоборот, из неодинаковых кусков и т. д.

Во всех этих и многих других аналогичных случаях применение при планировании раскроев математических расчётов, разработанных проф. Л. В. Канторовичем в сотрудничестве с В. А. Залгаллером, дают возможность установить способ наиболее экономного использования материалов.

Для простейших случаев такого раскроя листовых материалов, при котором учитывается только длина заготовок (а ширина их совпадает с шириной разрезаемых полос), Л. В. Канторович и В. А. Залгаллер предложили исключительно простой и удобный способ составления наиболее экономичного плана раскроя. Закончим нашу книжку описанием этого способа, который, несомненно, заинтересует читателя.

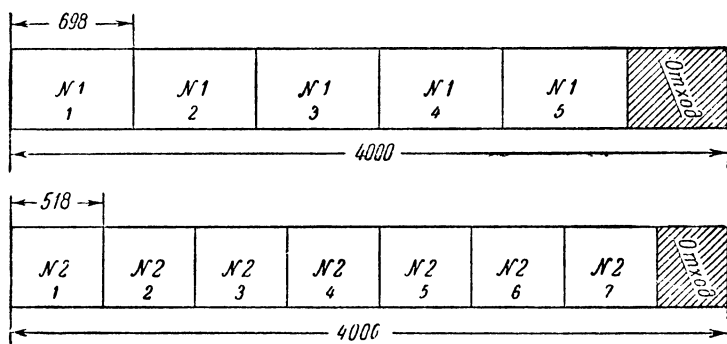


Рис. 93.

Предлагается, например, из полос длиной 4000 мм выкроить следующие комплекты заготовок:

Длина заготовок в мм	Количество заготовок на одно изделие
№ 1 698	8
№ 2 518	8

Допустим, что каждый лист раскраивается на заготовки только одного размера (рис. 93). Тогда на каждую заготовку

№ 1, уместающуюся в полосе 5 раз, расходуется

$$4000:5 = 800 \text{ мм};$$

на каждую заготовку № 2, уместающуюся в полосе 7 раз, расходуется

$$4000:7 \approx 571,5 \text{ мм.}$$

$$\text{На всё изделие расходуется } 800 \times 8 + 571,5 \times 8 = 10\,972 \text{ мм.}$$

Общая длина одного комплекта заготовок:

$$698 \times 8 + 518 \times 8 = 9728 \text{ мм.}$$

Отходы составляют

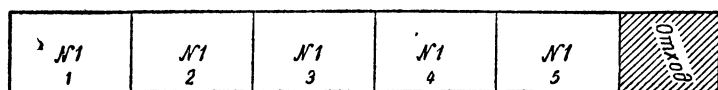
$$\frac{10\,972 - 9728}{10\,972} \cdot 100\% \approx 11,3\%.$$

Рассмотрим другие способы раскроя полосы в 4000 мм (рис. 94 на следующей странице). Вырежем, например, из неё только четыре заготовки № 1, тогда из остатка полосы можно выкроить две заготовки № 2. Если же из полосы вырежем три заготовки № 1, то из остатка выйдет три заготовки № 2 и т. д.

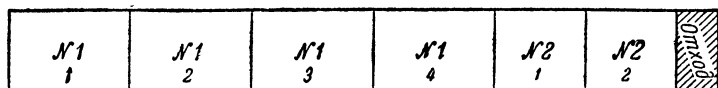
Все пригодные способы раскроя полосы, изображённые на рис. 94, сведём в таблицу, помещенную на стр. 148.

На клетчатой или миллиметровой бумаге (пусть теперь квадрат на нас поработает!) построим (рис. 95) две взаимно перпендикулярные оси (оси координат) и отметим те точки, у которых координата x (абсцисса) равна числу заготовок № 1 (698 мм), а координата y (ордината) равна числу заготовок № 2 (518 мм) того же раскроя. Обозначим эти точки той же буквой, что и название раскроя.

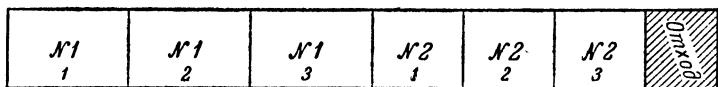
Допустим, что мы составили раскройный план, разрезая например, половину всего материала по раскрою A_1 , а остальную часть по раскрою A_6 . В среднем из одной затраченной полосы при таком плане будет получаться $\frac{5}{2}$ заготовок № 1 и $\frac{7}{2}$ заготовок № 2. Но точка с такими координатами



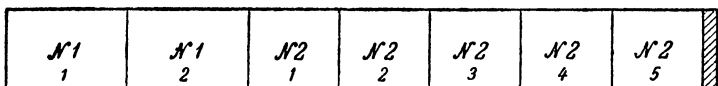
A_1



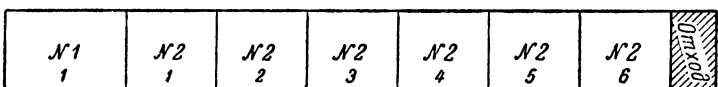
A_2



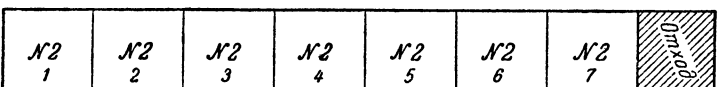
A_3



A_4



A_5



A_6

Рис. 94.

Название раскроя	Состав раскроя	
A_1	698×5	—
A_2	698×4	518×2
A_3	698×3	518×3
A_4	698×2	518×5
A_5	698×1	518×6
A_6	—	518×7

$x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{7}{2}$ получится, если соединить на графике точки A_1 и A_6 и отметить середину отрезка A_1A_6 (точка M).

Если несколько изменить план и по раскрою A_1 резать больше половины всего материала, а остальной материал разрезать по раскрою A_6 , то точка M переместится по отрезку A_1A_6 , сдвинувшись в сторону A_1 . Если, напротив, увеличить

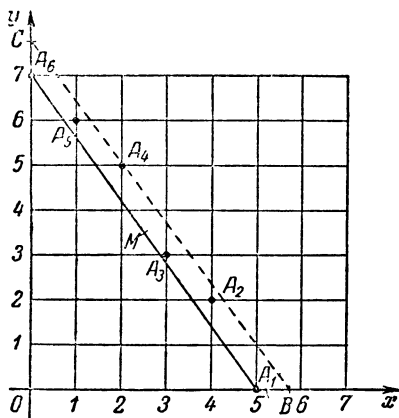


Рис. 95.

долю материала, раскраиваемого по A_6 , то точка M сдвинется ближе к A_6 . Как бы мы ни распределяли материал по раскройам A_1 и A_6 , полученные точки не сойдут с отрезка A_1A_6 .

Таким образом, точки на отрезке A_1A_6 своими координатами указывают количество заготовок № 1 и № 2, получаемых в среднем из одной затрачиваемой полосы, в различных планах, состоящих из раскroев A_1 и A_6 .

Наконец, если бы мы попробовали составлять всевозможные раскройные планы с привлечением различных раскroев A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 и других, то, как это может быть математически доказано, точка M , характеризующая состав заготовок, получаемых в среднем из одной затрачиваемой полосы материала, занимала бы при разных планах всевозможные

положения в выпуклой области $OA_1A_2A_4A_6O$. Эта область заштрихована на рис. 96.

По условию на каждое изделие требуется 8 заготовок № 1 и 8 заготовок № 2, то-есть обоих видов заготовок поровну.

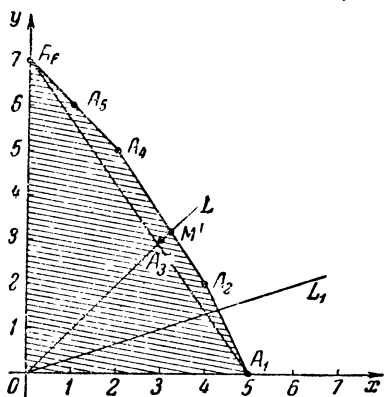


Рис. 96.

Это значит, что из всех планов удовлетворять условию комплектности будут лишь те, для которых точка M имеет одинаковые координаты x и y , то-есть лежит на луче L — биссектрисе угла xOy *).

Ясно, что чем дальше точка M отойдёт от точки O вдоль луча L , то-есть чем больше будут координаты точки M , тем больше заготовок обоих видов будет

получаться в среднем из одной затрачиваемой полосы и тем экономнее будет соответствующий раскройный план.

Поскольку же точка M не может выйти за пределы области $OA_1A_2A_4A_6O$, то наиболее экономным из всех планов, удовлетворяющих желаемой комплектности, будет тот план раскроя, при котором точка M займёт положение M' (пересечение луча L с границей многоугольника $OA_1A_2A_4A_6O$ (рис. 96). Этого можно достигнуть, употребляя раскрой A_2 и A_4 , соответствующие той стороне многоугольника, которую пересекает луч L .

Определим теперь, какую же долю всего материала следует резать по раскрою A_4 и какую — по раскрою A_2 .

Обозначим через z долю материала, раскраиваемую способом A_4 , остальная часть $(1 - z)$ пусть кроится способом A_2 .

*) Если на одно изделие требуются неодинаковые количества заготовок каждого вида, то прямая OL займёт иное положение, например OL_1 (рис. 96). Далее рассматриваются и такие примеры.

Тогда в среднем из каждой полосы будет получаться $2z + 4(1 - z)$ заготовок в 698 мм, а заготовок в 518 мм будет получаться $5z + 2(1 - z)$. Для удовлетворения необходимой комплектности (в данном случае поровну) должно быть соблюдено условие: $2z + 4(1 - z) = 5z + 2(1 - z)$, откуда находим:

$$z = \frac{2}{5}.$$

Тот факт, что значение z получилось в пределах от 0 до 1, показывает, что из приведённых раскроев действительно можно составить план, удовлетворяющий нужной комплектности.

Окончательно разработанный план принимает следующий вид:

Название раскроя	Состав раскроя	Доля материала
A_2	$698 \times 2 + 518 \times 2$	$\frac{2}{5}$
A_4	$698 \times 4 + 518 \times 2$	$\frac{3}{5}$

Этот план раскроя обеспечивает наименьший процент обрезков. Чему равен этот процент, читатель легко подсчитает сам.

Любопытно, что можно обойтись совсем без предварительного подсчёта возможных способов раскроя и найти точки A_1, A_2, \dots, A_8 сразу. Если (возвращаясь к рисунку 95) отметить на оси Ox точку B , абсцисса которой OB равна отношению длины одного куска материала (4000 мм) к длине заготовки № 1 (698 мм), т. е. $OB = \frac{4000}{698} = 5,73$, а на оси Oy отметить точку C , ордината которой равна отношению длины одного куска материала (4000 мм) к длине заготовки № 2 (518 мм), т. е. $OC = \frac{4000}{518} = 7,76$ и полученные

точки B и C соединить прямой BC (штриховая прямая на рис. 95), то все точки, ближайшие к прямой BC , лежащие под ней и имеющие координатами целые числа, изобразят все выполнимые раскрои.

Рассмотрим второй пример.

Пусть те же полосы длиной в 4000 мм требуется разрезать на заготовки, длины которых попрежнему равны 698 мм и 518 мм, но в комплект они должны входить не поровну, а так, чтобы на одну заготовку № 2 (518 мм) приходилось три заготовки № 1 (698 мм).

Составить рациональный план раскроя.

Для решения этой задачи пригоден имеющийся у нас график (рис. 96).

Но в соответствии с новым условием комплектности следует изменить направление луча L . Так как отношение числа заготовок № 1 к числу заготовок № 2 в каждом комплекте теперь равно 3, то новый луч L_1 должен проходить через такие точки, абсциссы которых втрое больше их ординат.

Луч L_1 пересекает звено A_1A_2 , значит, наилучший план раскроя дают способы A_1 и A_2 .

Чтобы завершить составление плана, положим опять, что z — это доля всего материала, разрезаемая по способу A_1 ; тогда доля материала, разрезаемая по способу A_2 , будет $(1 - z)$. В среднем из каждой полосы будет получаться $5z + 4(1 - z)$ заготовок № 1 (698 мм) и $2(1 - z)$ заготовок № 2.

Принимая во внимание соотношение количеств заготовок № 1 и № 2, составляем следующее уравнение:

$$5z + 4(1 - z) = 3 \cdot 2(1 - z).$$

$$\text{Отсюда } z = \frac{2}{7} \text{ и } 1 - z = \frac{5}{7}.$$

Итак, для получения наименьшего количества потерь из каждых семи листов два следует кроить по способу A_1 (698×5) и пять — по способу A_2 ($698 \times 4 + 518 \times 2$).

И, наконец, последний пример.

Требуется разрезать на гильотинных ножницах квадратные листы фанеры $1525 \times 1525 \text{ мм}^2$ на следующие прямоугольные заготовки:

Площадь заготовок в мм^2	Количество заготовок на одно изделие
№ 1 420×1300	1
№ 2 320×700	3

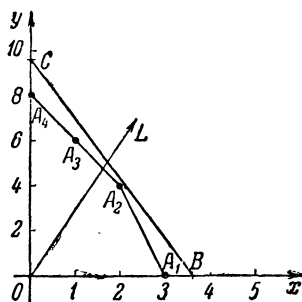


Рис. 97.

Отличие этой задачи от предыдущей в том, что здесь необходимо учитывать и размеры вторых сторон. Вторая сторона (1300) заготовки № 1 меньше стороны листа фанеры только на 225 мм; значит, в остатке не может уложиться даже меньшая заготовка № 2, так что этот случай полностью аналогичен предыдущим. Но вторая сторона (700) заготовки № 2 может уложиться на стороне листа фанеры дважды; значит, каждая полоса в 320 мм даст не одну заготовку № 2, как во всех предыдущих случаях, а две.

Чтобы учесть это при построении графика, мы каждую клетку по оси Ox будем попрежнему принимать за одну заготовку, а каждую клетку по оси Oy — за две заготовки. Далее можем действовать в соответствии с выработанным планом:

Разделим 1525 на 420, получим приблизительно 3,6. Построим точку $B(3,6; 0)$ (рис. 97).

Разделим 1525 на 320, получим приблизительно 4,8. Удвоим это число и получим точку $C(0; 9,6)$.

Проведём прямую BC . Ближайшие точки к этой прямой, лежащие ниже её и имеющие целые координаты, будут: $A_1(3; 0)$; $A_2(2; 4)$; $A_3(1; 6)$ и $A_4(0; 8)$. Это — изображения возможных раскроев.

Проведём луч OL (рис. 97) через точки, для которых отношение абсциссы к ординате равно $\frac{1}{3}$ (в соответствии с условием комплектности).

Луч OL в данном случае пересекает сторону A_2A_4 , на которой лежит ещё точка A_3 . Значит, наиболее экономный

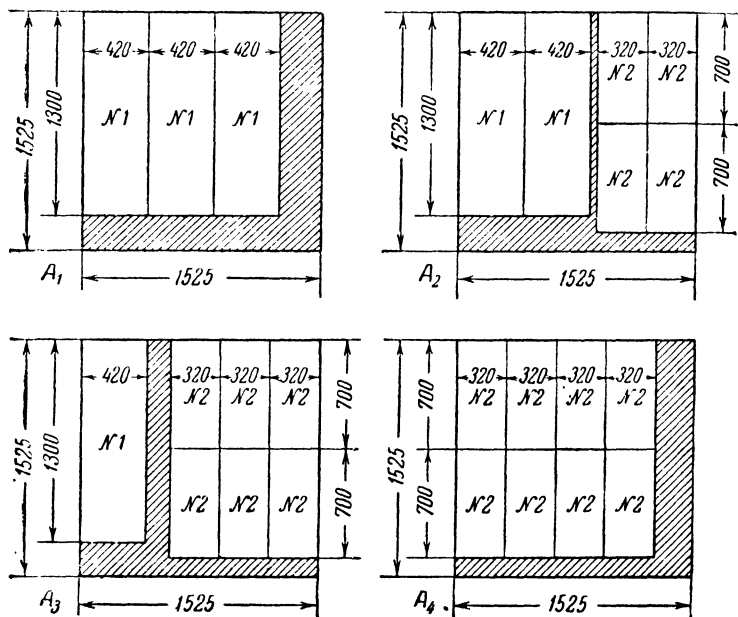


Рис. 98.

раскройный план может состоять или из раскроев A_2 и A_3 , или из раскроев A_2 и A_4 , или из комбинации всех трёх раскроев A_2 , A_3 , A_4 . Эти варианты плана не отличаются по экономичности. Выберите один из вариантов и составьте самостоятельно окончательный план раскроя.

Возможные раскрои A_1 , A_2 , A_3 и A_4 наглядно представлены на рис. 98.

Если бы мы захотели в этом раскросе листов фанеры на каждую заготовку № 1 получить не 3, а 2 заготовки № 2,

то луч OL прошёл бы через вершину A_2 . В этом случае весь материал следовало бы кроить по способу A_2 .

Л. В. Канторович и В. А. Залгаллер разработали способы расчёта наиболее экономного раскроя промышленных материалов не только для рассмотренных здесь случаев, но и для многих других. Ограничиваясь лишь примерами, близкими к теме нашей книги и вполне доступными широкому кругу читателей, мы хотели показать, как советские учёные-математики применяют математические методы к нуждам социалистического производства.

ЛИТЕРАТУРА

В заключение укажем несколько математических работ, дополняющих нашу книгу; мы вынуждены при этом отметить, что из известных нам книг почти все пригодны лишь для читателя, математически хорошо подготовленного.

1) В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников. Изд. второе, Гостехиздат, 1933.

Доказательство теоремы Ф. Больаи, раскрытию содержания которой на примере квадрата посвящены две трети нашей книги, данное самим Больаи, очень громоздко и в настоящее время интереса не представляет. Годом позже германский офицер Гервин дал доказательство теоремы Больаи более простым и изящным методом, но, занимаясь математикой только как любитель, он, естественно, не смог изложить его чётко и доходчиво.

Советский геометр, лауреат Сталинской премии, профессор В. Ф. Каган обработал мемуар Гервина и с большим педагогическим мастерством довёл доказательство теоремы Больаи до предельной ясности и простоты. В этой части его книга «О преобразовании многогранников» доступна не только учителям и студентам-математикам, для которых она написана, но и ученикам старших классов средней школы.

Значительно более трудным является вопрос об аналогичном преобразовании многогранников. Оказалось, что преобразование многогранника в другой, равновеликий ему, путём перегруппировки частей возможно только в редких случаях и при особых условиях. Доказательство и этого предложения долгое время было доступно лишь узкому кругу математиков-специалистов.

В. Ф. Каган в своей книге на основе принципов, до него никем не использованных, дал очень простое доказательство этого предложения.

2) Д. И. Перепёлкин, Курс элементарной геометрии, ч. 1, Гостехиздат, 1948.

Книга предназначена для студентов-математиков и учителей. Пригодна также и для сильных учеников старших классов средней школы. Имеется достаточно подробная теория равновеликости и равносоставленности многоугольников, в частности — доказательство теоремы Ф. Больаи (в книге теорема не названа именем Больаи).

3) Н. М. Бескин, Методика геометрии. Учпедгиз, 1947.

Книга написана для учителей и студентов педагогических институтов. Охарактеризована сущность теории площадей; имеются дополнительные сведения о равносоставленности и доказательство теоремы Больаи.

4) Янош Больаи, Аппендикс. Гостехиздат, 1951.

Книга написана для знающих неевклидову геометрию, но имеющийся в книге очерк о жизни и деятельности Фаркаша Больаи изложен популярно.

5) М. Е. Ващенко-Захарченко, История математики, т. 1, 1883 (имеется в Госуд. библиотеке им. В. И. Ленина, Москва).

В книге можно найти, в частности, сведения об Абул Вефе и его работах. Изложение популярное.

6) Я. И. Перельман, Занимательная геометрия. Под редакцией и с дополнениями Б. А. Кордемского. Гостехиздат, 1951.

Популярно изложен вопрос о фигурах с наибольшей площадью при данном периметре или с наименьшим периметром при данной площади.

7) The Dissection of Rectangles into squares (Duke Mathematical Journal), декабрь 1940.

В большой статье, написанной для специалистов-математиков, подробно рассматривается одно из возможных решений проблемы деления прямоугольника и квадрата на неповторяющиеся квадраты.

8) П. Л. Чебышев, О кройке одежды. Успехи математических наук, т. 1, вып. 2.

Для хорошо знающих высшую математику.

9) В. Е. Прудников, П. Л. Чебышев—учёный и педагог. Учпедгиз, 1950.

Книга знакомит с жизнью и деятельностью П. Л. Чебышева, гениального русского математика.

10) Л. В. Канторович и В. А. Залгаллер, Расчёт рационального раскроя промышленных материалов. Ленинградское газетно-журнальное и книжное изд-во, 1951.

Книга для мастеров, инженеров и плановиков, подробно знакомящая читателей с разработанной авторами теорией и практикой решения задач о рациональном раскрое материалов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Г л а в а I	
Преобразования квадрата (23 головоломки)	
Головоломки	10
Решения головоломок	28
Г л а в а II	
Геометрия превращений квадрата	
Задача разрезывания квадрата	35
Как Абул Вефа составил квадрат из трёх равных квадратов	37
Два способа превращения квадрата в три равных квадрата	39
Преобразование квадрата в равносторонний треугольник	47
Преобразование равностороннего треугольника в квадрат	52
Как раскроить параллелограм, чтобы из полученных частей можно было составить квадрат?	54
15 задач	53
Возможность превращений квадрата	62
Преобразование квадрата в 2, 3, ..., n равносторонних треуголь- ников	72
Решения задач главы II	77
Г л а в а III	
Некоторые замечательные свойства квадрата	
Чем квадрат «лучше» других четырёхугольников?	98
Правило квадрата в шахматах	103
Построения при помощи перегибаний квадратного листа бумаги	106
Квадрат в квадрате	112
Случай с алмазом	116
Квадрат около квадрата	118
Совершенное квадрирование	122
Квадраты и электрические токи	125
Решения задач главы III	135
Послесловие. Рациональный раскрой материалов	142
Литература	156

Редактор *И. Н. Бронштейн.*
Техн. редактор *Р. А. Негримова.*
Корректор *А. С. Каган.*

Обложка и художественное оформление
В. А. Селенгинского.

Чертежи и рисунки изготовлены
В. А. Сапожниковым.

*

Подписано к печати 19/IV 1952 г. Бума-
га 84×108/32. 2,5 бум. л. 8,2 печ. л. 6,8 уч.-изд.
л. 33 174 тип. зн. в печ. л. Цена книги 2 р. 05 к.
Тираж 200 000 экз. Зам. № 3249. Т-02120
Номинал — по прейскуранту 1952 г.

*

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР. Москва,
Валовая, 28.

Цена 2 р. 05 к.

